УДК 547.43

ИНВЕРСНЫЕ МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ ТРЕУГОЛЬНОГО И КВАДРАТНОГО ТИПА, СВЯЗАННЫЕ С МАТРИЧНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЛИУВИЛЛЯ

В. А. Андреев

Описана структура и найден явный вид операторов инверсной матричной алгебры, являющейся матричным обобщением алгебры $SU(2)$. Указано каким типам нелинейных интегрируемых уравнений соответствуют различные виды этой алгебры.

С каждым интегрируемым уравнением можно связать некоторую алгебру. Эта связь детально изучена для случая, когда решением уравнения или системы уравнений является скалярная функция. Разработано много конкретных схем, сопоставляющих каждой алгебре Ли или алгебре Каца–Муди свою интегрируемую систему. Однако выясняется, что если решением уравнения служит не скалярная функция, а более сложный объект, принадлежащий пространству не коммутирующих друг с другом величин, обычных алгебр оказывается недостаточно для описания возникающих уравнений. В данной работе рассматриваются уравнения, решениями которых являются матрицы. Таким уравнениям естественным и строго определенным образом сопоставляются некоторые алгебры, которые можно интерпретировать как матричное обобщение той алгебры Ли или Каца–Муди, которая отвечала скалярному аналогу матричного уравнения. Мы называем их инверсными матричными алгебрами (ИМА). Эти алгебры были впервые введены в работах [1, 2], они являются подалгебрами алгебр Уолквиста–Эстабрука [3, 4], которые описывают нелокальные законы сохранения произвольных уравнений, а для интегрируемых систем позволяют найти их условие нулевой кривизны.

В работах [1, 2] были сформулированы лишь общие принципы построения ИМА, задача же их полного описания пока не решена. Сложность проблемы состоит в том, что естественная формулировка ИМА, вытекающая из их связи с уравнениями, имеет неинвариантный координатный вид. Поскольку сами эти алгебры, как правило, бесконечномерны, возникающие вычисления оказываются весьма громоздкими. В данной работе приводится полное описание структуры простейшей из ИМА, являющейся матричным обобщением алгебры $SU(2)$ и связанной с матричным уравнением Лиувилля [1].

Матричное уравнение Лиувилля имеет вид системы

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S_1^{-1}\frac{\partial}{\partial t}S_1\right) = -S_1^{-1}S_2,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}S_2S_2^{-1}\right) = S_2S_1^{-1}. \qquad (1)$$

Оно является матричным обобщением скалярного уравнения Лиувилля

$$u_{xt} = e^u. \qquad (2)$$

Структура линейной задачи для скалярного уравнения Лиувилля (2) описывается алгеброй $SU(2)$ [5, 6]. Если решения матричного уравнения Лиувилля (1) реализуются на $N \times N$ матрицах, то аналогом алгебры $SU(2)$ служит ИМА $AI(SU(2))^N$. Вид этой алгебры существенным образом зависит от того, какой вид имеют матрицы S_1, S_2: диагональный (D), треугольный (T) или квадратный (S). В зависимости от этого и соответствующие им ИМА обозначаются $AI(SU(2))_D^N, AI(SU(2))_T^N$ и $AI(SU(2))_S^N$.

Напомним кратко правила, по которым строятся ИМА. Пусть мы имеем $N \times N$ матрицу X с элементами $x_{ij}, i, j = 1, ..., N$ и ее обратную матрицу Y с элементами y_{ij}. Тогда алгебра $AI(SU(2))^N$ порождается операторами

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}},\ x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}},\ \frac{\partial}{\partial y_{ij}},\ y_{ij}\frac{\partial}{\partial y_{ij}}. \qquad (3)$$

При вычислении коммутационных соотношений следует учитывать равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_{ij}} = -\sum_{a,b=1}^{N} x_{ai}x_{jb}\frac{\partial}{\partial x_{ab}},\ \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial x_{mn}}\right] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(y_{ab}) = -y_{ai}y_{jb},\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(x_{mn}) = \delta_{im}\delta_{jn}. \qquad (4)$$

В случае диагональных и треугольных матриц часть величин x_{ij}, y_{mn} равна нулю. В работе [7] были изучены диагональные и треугольные ИМА $AI(SU(2))_D^N$ и $AI(SU(2))_T^N$. Они имеют сравнительно простую структуру.

Диагональные алгебры $AI(SU(2))^N_D$ всегда конечномерны и имеют вид прямой суммы N алгебр $SU(2)$, коммутирующих друг с другом. Этой алгебре соответствует матричное уравнение Лиувилля (1), решениями которого служат диагональные $N \times N$ матрицы. Такое матричное уравнение (1) распадается в систему N не связанных друг с другом скалярных уравнений Лиувилля (2).

Треугольные алгебры $AI(SU(2))^N_T$ конечномерны при $N = 2$ и бесконечномерны при $N \geq 3$. Они имеют вид полупрямого произведения прямой суммы N алгебр $SU(2)$ на $N(N-1)/2$ нильпотентных алгебр. Эти треугольные ИМА соответствуют системе $N(N+1)/2$ уравнений. Такая система состоит из N несвязанных скалярных уравнений Лиувилля (2) и $N(N-1)/2$ связанных друг с другом линейных уравнений, коэффициентами которых служат решения N скалярных уравнений Лиувилля.

В работе [7] было дано явное описание алгебр $AI(SU(2))^2_T$ и $AI(SU(2))^3_T$. В данной работе мы дадим полное описание структуры всех треугольных и квадратных алгебр.

1) Треугольные алгебры.

Алгебра $AI(SU(2))^N_T$ образована операторами $\left\{T_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right\}$, где T_{ij} может принимать одно из четырех значений:

$$T_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} x^{\alpha}_{ii}x^{n}_{i+1,i+1}\ldots x^{m}_{j-1,j-1}x^{\beta}_{jj}x^{\gamma}_{i+1,i+2}\ldots x^{\delta}_{pq}\ldots x^{\omega}_{j-2,j-1}, \\ x^{n}_{i+1,i+1}\ldots x^{m}_{j-1,j-1}, x^{\beta}_{jj}x^{\alpha}_{i,i+1}x^{\gamma}_{i,i+2}\ldots x^{\delta}_{pq}\ldots x^{\omega}_{j-2,j-1}, \\ x^{\alpha}_{ii}x^{n}_{i+1,i+1}\ldots x^{m}_{j-1,j-1}x^{\beta}_{i+1,i+2}\ldots x^{\gamma}_{pq}x^{\delta}_{j-2,j}x^{\omega}_{j-1,j}, \\ x^{n}_{i+1,i+1}\ldots x^{m}_{j-1,j-1}x^{\alpha}_{i,i+1}x^{\beta}_{i,i+2}\ldots x^{\gamma}_{pq}\ldots x^{\delta}_{j-2,j}x^{\omega}_{j-1,j} \end{array} \right\}, \tag{5}$$

$$i \leq j;\ i,j = 1,\ldots,N;\ i < p < q < j,\ \alpha,\beta,\psi,\delta,\omega = 0,1;\ -\infty < m,n < \infty.$$

Алгебра $AI(SU(2))^N_T$ содержит в качестве подалгебр N коммутирующих друг с другом алгебр $SU(2)$, образованных операторами

$$\left\{E^{ii}_{+} = \frac{\partial}{\partial x_{ii}},\ E^{ii}_{-} = \frac{\partial}{\partial y_{ii}},\ H^{ii} = \left[\frac{\partial}{\partial x_{ii}}, \frac{\partial}{\partial y_{ii}}\right]\right\} = SU(2)^{ii}, \tag{6}$$

а также нильпотентные алгебры $T_{pq} = \left\{T_{pq}\frac{\partial}{\partial x_{pq}}\right\}$, $p < q$. Алгебры $T_{i,i+1}$ конечномерны, все остальные бесконечномерны.

2) Квадратные алгебры.

Алгебра $AI(SU(2))^N_S$ образована операторами $\left\{S_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}\right\}$, где

$$S_{ij} = \prod_{p,q,k,l=1}^{N} x_{pq}^{n_{pq}^{ij}} y_{kl}^{m_{kl}^{ij}}, \; -\infty < n_{pq}^{ij}, m_{pq}^{ij} < \infty. \tag{7}$$

В случае квадратной ИМА при каждой производной $\partial/\partial x_{ij}$ стоит коэффициент, имеющий вид произведения произвольного числа матричных элементов как прямой матрицы X, так и ее обратной Y, причем каждый из этих матричных элементов может стоять в произвольной целой степени, как положительной, так и отрицательной. Таким образом, все квадратные алгебры $AI(SU(2))_S^N$ бесконечномерны. Они содержат максимальную конечномерную подалгебру $SU(2N)$. Ее базис Картана–Вейля образован операторами

$$\begin{gathered}
E_{\omega_1} = \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \; E_{\omega_5} = \frac{\partial}{\partial x_{33}}, \; E_{\omega_9} = \frac{\partial}{\partial x_{55}}, \ldots, \; E_{\omega_{1+4k}} = \frac{\partial}{\partial x_{1+2k,1+2k}}, \\
E_{\omega_3} = \frac{\partial}{\partial y_{22}}, \; E_{\omega_7} = \frac{\partial}{\partial y_{66}}, \ldots, \; E_{\omega_{3+4k}} = \frac{\partial}{\partial y_{2+2k,2+2k}}, \\
E_{\omega_2} = M_{12}, \; E_{\omega_6} = M_{56}, \; \ldots, \; E_{\omega_{2+4k}} = M_{1+4k,2+4k}, \\
E_{\omega_4} = M_{32}, \; E_{\omega_8} = M_{76}, \; \ldots, \; E_{\omega_{4(k+1)}} = M_{3+4k,2+4k}, \\
k = 0, 1, \ldots, \; \text{где}\, M_{lp} = -\sum_q x_{ql} \frac{\partial}{\partial x_{qp}}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Число корней равно $2N - 1$.

Опишем теперь подробно структуру ИМА $AI(SU(2))_S^2$. Она порождается шестнадцатью операторами (3) $(i, j = 1, 2)$. Эти операторы связаны четырьмя соотношениями

$$\begin{gathered}
\left(x_{11} \frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{21} \frac{\partial}{\partial x_{21}} \right) = -\left(y_{11} \frac{\partial}{\partial y_{11}} + y_{12} \frac{\partial}{\partial y_{12}} \right), \\
\left(x_{11} \frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{12} \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) = -\left(y_{11} \frac{\partial}{\partial y_{11}} + y_{21} \frac{\partial}{\partial y_{21}} \right), \\
\left(x_{22} \frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{21} \frac{\partial}{\partial x_{21}} \right) = -\left(y_{22} \frac{\partial}{\partial y_{22}} + y_{12} \frac{\partial}{\partial y_{12}} \right), \\
\left(x_{22} \frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{12} \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) = -\left(y_{22} \frac{\partial}{\partial y_{22}} + y_{21} \frac{\partial}{\partial y_{21}} \right),
\end{gathered} \tag{9}$$

из которых три линейно независимы. Поэтому из шестнадцати операторов (3) линейно независимыми являются тринадцать.

Алгебра $AI(SU(2))_S^2$ содержит конечномерную подалгебру $SU(4)$. Элементы этой подалгебры имеют вид

$$E_{\omega_1} = X_{11} = \frac{\partial}{\partial x_{11}},\ E_{-\omega_1} = Y_{11} = \frac{\partial}{\partial y_{11}}, \tag{10}$$

$$E_{\omega_2} = M_{12} = -\left(x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{22}}\right),\ E_{-\omega_2} = M_{21} = -\left(x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{21}}\right),$$

$$E_{\omega_3} = Y_{22} = \frac{\partial}{\partial y_{22}},\ E_{-\omega_3} = X_{22} = \frac{\partial}{\partial x_{22}},$$

$$E_{\omega_1+\omega_2} = X_{12} = \frac{\partial}{\partial x_{12}},\ E_{-\omega_1-\omega_2} = Y_{12} = \frac{\partial}{\partial y_{21}},$$

$$E_{\omega_1+\omega_3} = Y_{21} = \frac{\partial}{\partial y_{12}},\ E_{-\omega_2-\omega_3} = X_{21} = \frac{\partial}{\partial x_{21}},$$

$$E_{\omega_1+\omega_2+\omega_3} = L_{21} = -\left(x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{12}}\right).$$

Из тринадцати операторов (3) одиннадцать входят в алгебру $SU(4)$. Это двенадцать операторов алгебр $SU(2)^{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ вида (6), между которыми существует одно соотношение

$$H^{11} + H^{22} = H^{12} + H^{21}. \tag{11}$$

Оставшиеся два оператора, не входящие в алгебру $SU(4)$, имеют вид

$$G_x = x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{21}},$$

$$G_y = y_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}} + y_{22}\frac{\partial}{\partial y_{22}} - y_{12}\frac{\partial}{\partial y_{12}} - y_{21}\frac{\partial}{\partial y_{21}}. \tag{12}$$

Таким образом, бесконечномерная ИМА $AI(SU(2))^2_S$ получается из конечномерной алгебры $SU(4)$ добавлением к ее операторам (10) двух дополнительных операторов G_x, G_y (12).

Скалярное уравнение Лиувилля (2) возникает во многих областях физики: в нелинейной оптике, в теории плазменных структур, в полевых теориях и струнных моделях. Матричное уравнение Лиувилля (1) можно интерпретировать как систему связанных друг с другом скалярных уравнений Лиувилля. Зная ИМА этого уравнения, можно строить его интегралы движения и решения солитонного типа. В конкретных задачах они приобретают непосредственный физический смысл, что позволяет описывать с их помощью новые нелинейные явления и процессы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–02–17987).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андреев В. А. ТМФ, **83**, 41 (1990).
[2] Андреев В. А. ТМФ, **84**, 353 (1990).
[3] Wahlquist H. D. and Estabrook F. B. J. Math. Phys., **16**, 1 (1975).
[4] Wahlquist H. D. and Estabrook F. B. J. Math. Phys., **17**, 1293 (1976).
[5] Андреев В. А. ТМФ, **29**, 213 (1976).
[6] Андреев В. А. Труды ФИАН, **173**, 200 (1986).
[7] Андреев В. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3 – 4, 55 (1997).

Поступила в редакцию 27 ноября 1997 г.