

ДИФРАКЦИЯ НА ЭКРАНЕ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ КРУГЛЫМИ АПЕРТУРАМИ

К.А. Боярчук, К.И. Воляк, А.В. Краснослободцев

Рассмотрен один из вариантов классической задачи о дифракции на случайном экране в постановке, близкой к однократному рассеянию света полидисперсными средами в малоугловом приближении. Результаты расчетов приложены к двумерному фурье-анализу реальных изображений.

Рассмотрим следующую модель рассеивающей среды. Пусть прозрачные круглые апертуры случайным образом распределены по прямоугольному непрозрачному экрану. Совокупность апертур является реализацией вероятностного процесса, в котором случайными величинами служат координаты центров и радиусы кругов. Если функция f в каждом круглом окне с номером n принимает значение коэффициента пропускания l_n , а вне окон — нулевое значение, то дифрагированное экраном поле в дальней зоне будет пропорционально фурье-спектру от всех N апертур экрана:

$$F(f) = \sum_{n=1}^N F(f_n) = \sum_{n=1}^N l_n \iint_{S_n} \exp(ik_1x + ik_2y) dx dy, \quad (1)$$

где S_n — площадь; a_n, b_n координаты апертур на экране; (k_1, k_2) — координаты в фурье-плоскости.

Полагая для простоты все апертуры одинаково прозрачными ($l_n = l$) и беря внутренний интеграл в выражении (1), получим

$$F(f) = (2\pi l/k) \exp(ik_1\bar{a} + ik_2\bar{b}) \sum_{n=1}^N r_n J_1(kr_n), \quad (2)$$

где \bar{a} и \bar{b} — некоторые средние значения координат; r_n — радиус апертур на экране; $J_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка; $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Если выборка велика, то суммирование в (2) можно заменить интегралом по плотности распределения радиусов апертур $W(r)$ и рассчитать интенсивность поля в дальней зоне, пропорциональную спектру Винера

$$\langle |F(f)|^2 \rangle = (4\pi^2 l^2 N^2 / k^2) \left[\int_0^\infty W(r) r J_1(kr) dr \right]^2.$$

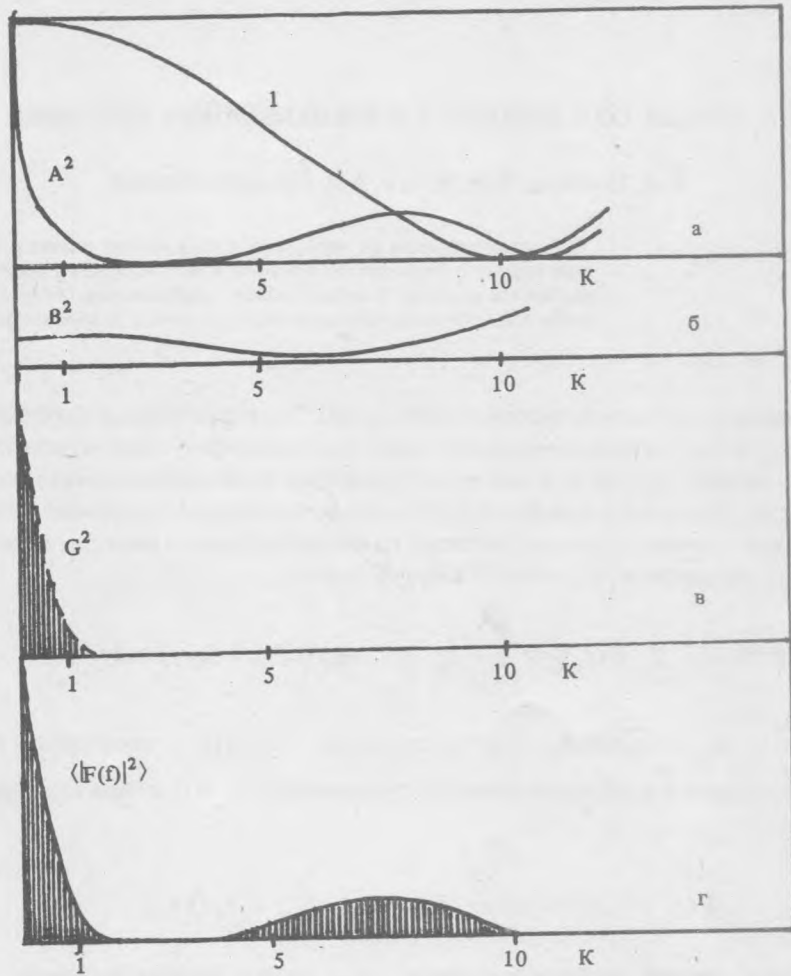
Предположим, что характерное отклонение от эмпирического среднего $k|r_n - \bar{r}| = k\Delta r_n$ мало и справедливо разложение

$$J_1(kr_n) = J_1(k\bar{r}) + k\Delta r_n \left. \frac{dJ_1}{dz} \right|_{z=k\bar{r}} + (1/2) (k\Delta r_n)^2 \left. \frac{d^2 J_1}{dz^2} \right|_{z=k\bar{r}} + \dots$$

Переходя к ансамблю выборок и учитывая только статистически значимые результаты, получим из (2) с точностью до знакопеременных членов $O[(k\Delta r_n)^3]$:

$$\langle |F(f)|^2 \rangle = (4\pi^2 l^2 / k^2) N^2 A^2, \quad (3)$$

где $A^2 = [\bar{r} J_1(k\bar{r}) + (D^2/2) (kJ_0(k\bar{r}) - k^2 \bar{r} J_1(k\bar{r}))^2]^2$ — модуляция спектра за счет разброса апертур по радиусам; $D^2 = N^{-1} \sum_{n=1}^N (\Delta r_n)^2$ — эмпирическая дисперсия радиусов апертур, наличие которой в выражении (3) искажает картину классической дифракции на круглом отверстии.



Р и с. 1. Графики, объясняющие формирование спектра (5): а – зависимость A^2 от k из-за разброса апертур по радиусам; она сильно отличается от дифракции на круглом отверстии (кривая 1); б – слабая модуляция спектра, вносимая разбросом расстояний между апертурами; в – спекл-структура спектра; г – окончательный спектр.

Рассмотрим множители в выражении (1), зависящие от распределения апертур по координатам, и выделим их в отдельную сумму. Причем, если апертуры помещены в узлы правильной прямоугольной сетки с числами N_1 и N_2 ($N_1, N_2 = N$) узлов на ее сторонах и шагами h и s , сумма распадается на произведение:

$$\sum_{n=1}^N \exp(ia_n k_1 + ib_n k_2) = \sum_{p=1}^{N_1} \exp(ik_1 ph) \sum_{q=1}^{N_2} \exp(ik_2 qs). \quad (4)$$

Учитывая эффект случайного отклонения апертур Δa_p , Δb_q от узлов правильной решетки, получим для каждого из сомножителей (4)

$$\sum_{p=1}^{N_1} \exp(ika_p) = \sum_{p=1}^{N_1} \exp(ikph) [1 + ik\Delta a_p - (k^2/2) (\Delta a_p)^2 + \dots],$$

или, вводя эмпирические статистические моменты и опуская члены разложения с нечетными степенями

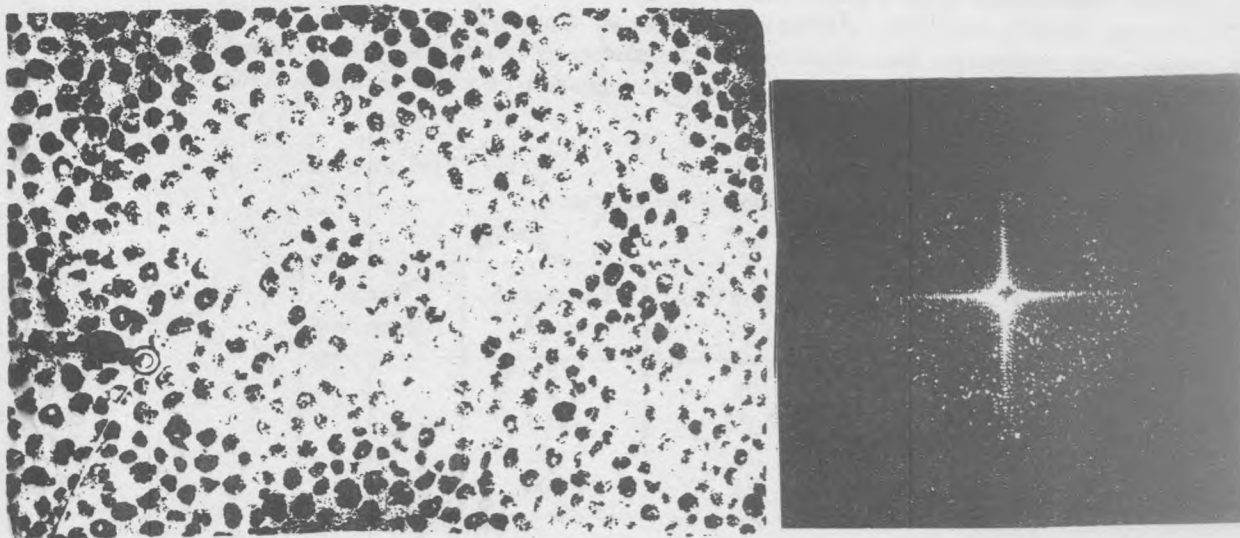
$$\Delta a_p, \sum_{p=1}^{N_1} \exp(ika_p) = \sqrt{BC}, \text{ где } B = (1 - (k^2/2) \overline{(\Delta a_p)^2} + (k^4/12) \overline{(\Delta a_p)^4} + \dots)^2 - \text{дополнительная сла-}$$

бая модуляция спектра, которая зависит от разброса расстояний между апертурами; $C = \sin \left(\frac{\sqrt{N_1 + 1}}{2} \right) kh / \sin \left(\frac{kh}{2} \right)$ – высокочастотное заполнение (спекл-структура) спектра. Аналогичная формула справедлива и для случайного отклонения Δb_q .

Таким образом, полная интенсивность света, дифрагировавшего на случайном экране, будет пропорциональна для малых k выражению

$$\langle |F(f)|^2 \rangle = (4\pi^2 l^2 N^2 / k^2) A^2 B^2 C^2. \quad (5)$$

Отдельные множители, входящие в (5), изображены на рис. 1а – в. На рис. 1г представлен результирующий график, соответствующий выражению (5). Подробные вычисления выражения (5) проведены в работе /1/.



Р и с. 2. а – фотоизображение морского дна, усеянного железо-марганцевыми конкрециями; б – спектр Винера, полученный с негатива фотоизображения рис. 2а.

Приведенные выше результаты были приложены к фурье-анализу изображений морского дна, равномерно усеянного железо-марганцевыми конкрециями. Конкреции на фотоизображении (рис. 2а) представляют собой округлые и близкие по величине темные пятна на сравнительно светлом фоне дна. Негативы изображений вполне соответствовали предложенной здесь модели случайного экрана.

В эксперименте негативные полупрозрачные фотоизображения помещались в лазерный фурье-процессор /2/ в качестве транспарантов. Это дало возможность наблюдать в фокальной плоскости фурье-линзы спектр Винера, т. е. дифракцию Фраунгофера на этих транспарантах (рис. 2б). Результаты фотометрирования дифракционной картины (рис. 2б) позволили определить средний размер конкреций и его дисперсию.

Авторы благодарны В.В. Виноградову за предоставленный фотоматериал и обсуждение результатов обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о я р ч у к К. А. и др. Препринт ИОФАН № 324, М., 1985.
2. Г у д м е н Дж. Введение в фурье-оптику. М., Мир, 1970.

Поступила в редакцию 17 февраля 1986 г.