Краткие сообщения по физике № 9-1986 г.

УДК 532.5; 528.2

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

И.А. Маслов

Получены оценки сил, действующих на частицу жидкости при движении в неоднородном гравитационном поле.

На движущуюся материальную частицу действует сумма сил инерции A_i и гравитации G_i:

$$F_i = G_i + A_i. \tag{1}$$

Для простоты представления рассмотрим уравнение (1) в инерциальной системе декартовых координат $0(x_1 x_2 x_3)$. Скорость переносного движения частицы u_i в такой системе координат определяется производной по времени радиуса-вектора x_i:

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{x}_i, \tag{2}$$

а ускорение ее A_i может быть записано в виде

$$A_i = -\ddot{x}_i = \dot{u}_i. \tag{3}$$

С учетом выражения (3) и определения $G_i \equiv V_i = \nabla V$ (V – гравитационный потенциал) уравнение (1) можно представить в виде

$$\dot{u}_i = -F_i + V_i. \tag{4}$$

Приращение гравитационной силы dV_i связано с изменением радиуса-вектора соотношением

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j, \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ – вторые производные гравитационного потенциала. С учетом (2) выражение (5) может быть записано в виде:

$$dV_i = V_{ij}|_{t_0} u_j|_{t_0} dt. \tag{6}$$

Интегрирование (6) по времени от t_0 до t вдоль траектории движения частицы дает

$$V_i|_t = V^0_i|_{t_0} + \int_{t_0}^{t} V_{ij}|_{t_0} u_j|_{t_0} dt. \tag{7}$$

Проинтегрируем (4) вдоль траектории частицы по времени от t_0 до t, обозначая переменную интегрирования s:

$$u_i = u_i^0 - \int_{t_0}^{t} F_i(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} V_i(s)\,ds. \tag{8}$$

Подставляя в (7) выражение u_i согласно (8) и заменяя переменную интегрирования, получим:

$$V_i(t) = V_i^0 + \int_{t_0}^{t} V_{ij}(s)\,[u_j^0 - \int_{t_0}^{t} F_j(r)\,dr + \int_{t_0}^{t} V_j(r)\,dr]\,ds, \tag{9}$$

где переменные s и r имеют смысл времени.

С учетом (9) можно записать (8) в виде

$$u_i(t) = u_i^0 + \int_{t_0}^{t} V_i^0 dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} V_{ij}(s)\,[u_j^0 - \int_{t_0}^{r} F_j(r)\,dr + \int_{t_0}^{r} V_j(r)\,dr]\,ds dt - \int_{t_0}^{t} F_i(s)\,ds.$$

Рассмотрим случай ускоренного движения в слабом гравитационном поле $\dot{u}_i \gg V_i$. Скорость $u_i(t)$ в момент времени t согласно (8) можно представить в этом приближении выражением

$$u_i^{(1)}(t) = u_i^0 - \int_{t_0}^{t} F_i(t)\,dt. \tag{10}$$

С учетом (10) выражение для второго приближения $u_i^{(2)}$ принимает вид:

$$u_i^{(2)}(t) = u_i^{(1)} + \int_{t_0}^{t} V_i^0 dt + \int_{t_0}^{t} [\int_{t_0}^{s} V_{ij}(s) u_j^{(1)}(s)\,ds + \int_{t_0}^{s} V_j(s)\,ds]\,ds dt = u_i^{(1)} + \int_{t_0}^{t} V_i^0 dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} V_{ij}(t) u_j^{(1)}(s)\,ds dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{r} V_{ij}(r) V_j(s)\,dr ds dt. \tag{11}$$

Пренебрегая последним членом в уравнении (11), запишем

$$u_i^{(2)}(t) = u_i^{(1)} + \int_{t_0}^{t} V_i^0 dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} V_{ij}(t)\,u_j^{(1)}(s)\,ds dt. \tag{12}$$

Появление в правой части (12) членов, содержащих элементы гравитационного поля, приводит к изменению характера движения частицы. Так, если в отсутствие гравитационного поля скорость частицы $u_i^{(1)}$ была постоянной, $\dot{u}_i^{(1)} = 0$, то в гравитационном поле уже через некоторый интервал времени $\Delta t = t - t_0$ она приобретает ускорение, зависящее от величины и структуры V_{ij}: $u^{(2)} - u_i^{(1)} = \int_{t_0}^{t} V_{ij} u_j^{(1)} dt$, приводящее к изменению траектории частицы, которое за время Δt составит

$$x_i = \int_{t_0}^{t} u_i^{(2)}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} u_i^{(1)} dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} V_i^0 ds dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{r} V_{ij}(s)\,u_j^{(1)}(r)\,dr ds dt.$$

Оценим вклад вторых производных гравитационного потенциала в изменение скорости $u_i^{(1)}$ согласно (12). Рассмотрим случай равномерного движения с постоянной скоростью $u_i^{(1)}$ по геодезической поверхности Земли. В этом случае на поверхности $V_1 = V_2 = 0$ и справедливо уравнение Лапласа для вторых производных V: $\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$. На Земле $V_{zz} = -3086$ Е, $V_\Delta = V_{yy} - V_{xx} = 10{,}25 \cdot \cos^2\varphi$E, где $E = 10^{-9}$ c^{-2} (1 этвеш) /1/.

Для широты $\varphi = 0^O$ $V_\Delta = 10{,}25$ Е, для $\varphi = 45^O$ $V_\Delta \approx 5{,}1$ Е, для $\varphi = 90^O$ $V_\Delta = 0$, т. е. приближенно можно считать $V_{yy} = V_{xx}$.

В соответствии с этим примем $V_{xx} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Е. Поскольку $V_{xy} = 0$, а $V_{xz} = 8{,}1$ Е для $\varphi = 45^O$, то их величинами можно пренебречь по сравнению с V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}. Третий член правой части уравнения (12) в составляющих имеет вид:

$$\Delta u_1^{(2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} [V_{11}(t)u_1^{(1)}(s) + V_{12}(t)u_2^{(1)}(s) + V_{13}(t)u_3^{(1)}(s)]\,ds\,dt,$$

$$\Delta u_2^{(2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} [V_{12}(t)u_1^{(1)}(s) + V_{22}(t)u_2^{(1)}(s) + V_{23}(t)u_3^{(1)}(s)]\,ds\,dt, \qquad (13)$$

$$\Delta u_3^{(2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} [V_{13}(t)u_1^{(1)}(s) + V_{32}(t)u_2^{(1)}(s) + V_{33}(t)u_3^{(1)}(s)]\,ds\,dt.$$

Оценим вклад $V_{11} = V_{xx}$ в составляющую ускорения $\dot{u}_1^{(1)}$ (горизонтальную составляющую силы, действующей на частицу в поле V_{ij}). При $\Delta t = 100$ с величина $\Delta u_1^{(2)} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}\, u_1$ сопоставима с параметром Кориолиса f (см$\cdot$с$^{-2}$), равным на средних широтах $\pm\, 10^{-4}\, u_1$, учет которого в задачах динамики океана является обязательным.

Скорости движения водных масс изменяются приблизительно от 500 см$\cdot$с$^{-1}$ для приливно-отливных течений, 250 см$\cdot$с$^{-1}$ для Гольфстрима, 150 см$\cdot$с$^{-1}$ для глубинных противотечений, до 50 см$\cdot$с$^{-1}$ для поверхностных течений /2/. При этих скоростях время прохождения частицей жидкости области гравитационной аномалии протяженностью 50 м с амплитудой $V_{11} \gg V_{12} \approx V_{13} = 1 \cdot 10^{-6} c^{-2}$ составит 10 с и более.

В соответствии с (13) $u_1^{(2)} \approx V_{11}\Delta t^2 u_1^{(1)}$ и изменения горизонтальной скорости u_1 при $\Delta t = 10$ с могут варьировать от 6,5 см$\cdot$с$^{-1}$ до $\approx 0{,}7$ см$\cdot$с$^{-1}$. Обусловленные ими изменения траектории частиц будут зависеть от отношения величин градиентов гравитационного поля и составляющих скорости течения.

Приведенное рассмотрение позволяет сделать вывод о необходимости учета неоднородного гравитационного поля при движении материальных частиц, в частности, при решении задач динамики океана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. М.-Л., ГТТИ, 1933, с. 396.
2. Гембель А. В. Общая география Мирового океана. М., Высшая школа, 1979, с. 108.

Поступила в редакцию 29 апреля 1986 г.