Краткие сообщения по физике № 9-1986 г.

УДК 530.1

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША–ГОРДАНА ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

А.Л. Шелепин

Формулируется метод производящих инвариантов для симплектических групп. Вычислены коэффициенты Клебша–Гордана для связывания симметричных представлений D(PO...O) групп Sp(2N) и получены их свойства симметрии.

В настоящее время симплектические группы находят применение в физике ядра /1/, физике атома /2/, оптике /3/. Sp (2N,R) является группой динамической симметрии N-мерного гармонического осциллятора /1/. Однако, по сравнению с унитарными и ортогональными, расчетный аппарат представлений симплектических групп развит слабо. В данной работе метод производящих инвариантов (ПИ), использованный ранее в теории групп SU (N) /4,5/, переносится на симплектические группы и применяется для вычисления коэффициентов Клебша–Гордана (ККГ), связывающих представления D(PO...O) групп Sp (2N), причем обнаруживается высокая степень симметрии этих коэффициентов. Применение метода ПИ позволяет вычислить ККГ сразу для всех Sp (2N) (исходя из общей структуры инвариантов), аналогично $n \times n$-символам для групп SU (N) /4/. При этом, если $n \times n$-символ является обобщением ККГ SU (2) = Sp (2) на группы SU (N), то полученный в данной работе ККГ является обобщением на группы Sp (2N) и имеет аналогичную случаю SU (2) блочную структуру (сумма произведения трех гипергеометрических распределений /6/).

Симметрический базис представления D (PO...O) образован однородными полиномами, построенными из 2N базисных функций u_i, $\overline{u}_i$, $i = \overline{1,N}$ фундаментального представления D (10...0). Он не является избыточным и совпадает с базисом, отвечающим редукции $Sp(2N) \supset (\otimes SU(2))^N$:

$$\left| \begin{matrix} P0...0 \\ T_i\, t_i \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} P0...0 \\ p_i\, \overline{p}_i \end{matrix} \right\rangle = \left(\frac{P!}{\prod\limits_i p_i |\, \overline{p}_i|} \right)^{1/2} u_1^{p_1} \overline{u}_1^{\overline{p}_1} \ldots u_N^{p_N} \overline{u}_N^{\overline{p}_N}, \tag{1}$$

$$2t_i = p_i - \overline{p}_i, \quad 2T_i = p_i + \overline{p}_i, \quad \sum_i 2T_i = P.$$

Остановимся кратко на описании представлений D (P0...0) групп Sp (2N), $\dim D(P0...0) = (P + 2N - 1)!/((2N - 1)!P!)$. Весовая диаграмма имеет вид N-мерного октаэдра (для фундаментального представления D (10...0) веса располагаются в его вершинах), на ребрах которого все веса некратные; кратность веса возрастает при отходе от края весовой диаграммы и достигает в центре $([P/2] + N - 1)!/([P/2]!(N-1)!)$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа). Прямое произведение разлагается в ряд КГ /6/:

$$D(P^1 0...0) \otimes D(P^2 0...0) = \sum_{a,S;\, a+S=0}^{\min\{P^1 P^2\}} D(P^1 + P^2 - 2a - 2S\; S\; 0...0). \tag{2}$$

Для установления формул редукции на подгруппы заметим, что u_i и $\overline{u}_i$ являются базисными векторами фундаментальных представлений подгрупп $SU(2)_i$, а $u_1, u_2, \ldots, u_N$ и $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_N$ – фундаментальных представлений D (10...0) и D (0...01) подгруппы SU (N). Формулы редукции для $Sp(2N) \supset SU(N)$ и $Sp(2N) \supset (\otimes SU(2))^N$ имеют вид соответственно

$$D(P0...0) = \sum_{a=0}^{P} D(P-a\,0...0\,a),\ N>2,$$

$$D(P0...0) = \sum_{\Sigma 2T_i = P} D(T_1 T_2 ... T_N). \tag{3}$$

Инвариантами симплектических групп являются косое произведение $(uv) = \Sigma (u_i \overline{v}_i - \overline{u}_i v_i)$ и пфаффиан. Свертке $D(P0...0) \otimes D(P0...0) \to \mathrm{inv}$ отвечает ПИ $(uv)^P$; симметризации $D(P^1 0...0) \otimes D(P^2 0...0) \to D(P^1 + P^2 0...0)$ отвечает $(uw)^{P^1}(vw)^{P^2}$. Операции

$$D(P^1 0...0) \otimes D(P^2 0...0) \to D(P^1 + P^2 - 2a\ 0...0) \tag{4}$$

отвечает нормированный ПИ (инвариантный вектор) того же вида, что и в случае группы SU(2) /7/:

$$\rho (uv)^a (wu)^{P^1 - a} (vw)^{P^2 - a}. \tag{5}$$

ККГ $\langle P^1 | P^2 | P^1 + P^2 - 2a \| 0 \rangle$ находится как коэффициент перед нормированным произведением базисов в разложении (5); после вычисления нормировки

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(P^1 + P^2 - a + 2N - 1)!\,(P^1 - a)!\,(P^2 - a)!\,a!}{(2N-1)!\,P^1!\,P^2!\,(P^1 + P^2 - 2a)!} \tag{6}$$

с учетом

$$\left\langle \begin{matrix} P^1 \\ T_i^1 t_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ T_i^2 t_i^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P \\ T_i t_i \end{matrix} \middle\| 0 \right\rangle = \frac{(-1)^{\Sigma P_i}}{(\dim D(P0...0))^{1/2}} \left\langle \begin{matrix} P^1 \\ T_i^1 t_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ T_i^2 t_i^2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P \\ T_i - t_i \end{matrix} \right\rangle \tag{7}$$

окончательно получим

$$\left\langle \begin{matrix} P^1 0...0 \\ T_i^1 t_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 0...0 \\ T_i^2 t_i^2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P = P^1 + P^2 - 2a\ 0...0 \\ T_i t_i^1 + t_i^2 \end{matrix} \right\rangle = \left(\frac{\rho^2}{\dim D(P0...0)} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{a_i' + a_i'' = a_i} (-1)^{\Sigma a_i''} \begin{bmatrix} p_i^1 - a_i' & \overline{p}_i^1 - a_i'' \\ p_i^2 - a_i'' & \overline{p}_i^2 - a_i' \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} p_i^1 - a_i' & \overline{p}_i^1 - a_i'' \\ a_i' & a_i'' \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} p_i^2 - a_i'' & \overline{p}_i^2 - a_i' \\ a_i'' & a_i' \end{bmatrix}^{1/2} = \tag{8}$$

$$= \left(\frac{(P+2N-1)!\,(P^1 - a)!\,(P^2 - a)!\,a!}{(P+a+2N-1)!\,P!} \right)^{1/2} \prod_1 (p_i! \overline{p}_i! p_i^1! p_i^1! p_i^2! \overline{p}_i^2!)^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{a_i'+a_i''=a_i} \frac{(-1)^{a_i''}}{(p_i^1-a_i')!\,(\bar p_i^1-a_i'')!\,(p_i^2-a_i'')!\,(\bar p_i^2-a_i')!\,a_i'!\,a_i''!} = \left(\frac{(P+2N-1)!\,(P^1-a)!\,(P^2-a)!\,a!}{(P+a+2N-1)!\,P!}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \prod_i \left(\frac{(2T_i+1)\,(T_i^2+T_i-T_i^1)!\,(T_i+T_i^1-T_i^2)!\,a_i!}{(T_i^1+T_i^2+T_i+1)!}\right)^{-1/2} \langle T_i^1 t_i^1 | T_i^2 t_i^2 || T_i t_i \rangle_{SU(2)},$$

Здесь $a_i = T_i^1 + T_i^2 - T_i = p_i^1 + p_i^2 - p_i$; $\begin{bmatrix} k_1^1 \dots k_N^1 \\ k_1^2 \dots k_N^2 \end{bmatrix} = \dfrac{\prod_i (k_i^1 + k_i^2)!\,(\sum_i k_i^1)!\,(\sum_i k_i^2)!}{\prod_i (k_i^1! k_i^2!)\,(\sum_i (k_i^1 + k_i^2))!}$ – обобщенное гипергеометрическое распределение, свойства которого рассмотрены в /6/. Так как коэффициенты КГ связывают между собой два ортонормированных базиса, то матрица, составленная из этих коэффициентов, является унитарной, т.е.

$$\sum_{t_i^1, T_i^1} \left\langle \begin{matrix} p^1 \\ T_i^1 t_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p^2 \\ T_i^2 t_i^2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} p \\ T_i t_i \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} p^1 \\ T_i^1 t_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p^2 \\ T_i^2 t_i^2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} p' \\ T_i' t_i' \end{matrix} \right\rangle = \prod_i \delta_{t_i t_i'} \delta_{T_i T_i'}.$$

Произвол в выборе фазы устраняется аналогично случаю $SU(2) = Sp(2)$ /7/ наложением условия

$$\left\langle \begin{matrix} P^1 \\ t_i = T_i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P \\ \dots \end{matrix} \right\rangle \geqslant 0; \text{ тогда } \rho = |\rho|\,(-1)^{a-P^1}.$$

Выражение (8) включает в себя коэффициент КГ группы $SU(2)$ как частный случай при $N = 1$, который одновременно является строительным блоком в общем выражении. Множитель перед произведением ККГ группы $SU(2)$ можно трактовать как изофактор в редукции $Sp(2N) \supset (\otimes\, SU(2))^N$; он образован отношением нормировочных множителей. Ненормированный коэффициент (8), выраженный через обобщенное гипергеометрическое распределение, был ранее получен другим методом в /6/.

Коэффициент КГ (8) имеет $6 \cdot N! \cdot 2^N$ симметрий. Они складываются из $3! = 6$ симметрий перестановок перемножаемых представлений

$$\langle P^1 | P^2 || P \rangle = (-1)^{\sum p_i^2} \left(\frac{\dim D(P0\dots)}{\dim D(P^1 0 \dots)}\right)^{1/2} \langle P | P^2 || P^1 \rangle,$$

$$\langle P^1 | P^2 || P \rangle = (-1)^{a} \langle P^2 | P^1 || P \rangle \tag{9}$$

и симметрий весовой диаграммы. Это 2^N замен $t_i \to -t_i$

$$\left\langle \begin{matrix} P^1 \\ \dots t_i^1 \dots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ \dots t_i^2 \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P \\ \dots t_i \dots \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{a_i} \left\langle \begin{matrix} P^1 \\ \dots -t_i^1 \dots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ \dots -t_i^2 \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P \\ \dots -t_i \dots \end{matrix} \right\rangle, \tag{10}$$

где $a_i = T_i^1 + T_i^2 - T_i$ и N! замен $T_i \longleftrightarrow T_k$, $t_i \longleftrightarrow t_k$, которые не изменяют значение коэффициента.

Для $SU(2) = Sp(2)$ имеем $6 \cdot 2 = 12$ классических симметрий, для $Sp(4) = O(5)$ уже $6 \cdot 8 = 48$ симметрий. Физически симметрический базис отвечает ненарушенной симметрии; он соответствует максимальной симметрии ККГ. В любом другом редукционном базисе (например, типа $Sp(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$) число симметрий ККГ будет меньшим.

В некоторых частных случаях суммирование в (8) отсутствует, например, при $t_i = T_i$, $i = 1,N$, а также для симметризации

$$\left\langle \begin{matrix} P^1 \\ \\ p_i^1 \bar{p}_i^1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \\ \\ p_i^2 \bar{p}_i^2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P^1 + P^2 \\ \\ p_i^1 + p_i^2 \bar{p}_i^1 + \bar{p}_i^2 \end{matrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} p_1^1 \bar{p}_1^1 p_2^1 \dots \bar{p}_N^1 \\ \\ p_1^2 \bar{p}_1^2 p_2^2 \dots \bar{p}_N^2 \end{bmatrix}^{1/2} .$$

Представляет интерес возможность перенесения полученных результатов на некомпактные группы $Sp(m,n)$ и $Sp(2N,R)$. Здесь, по-видимому, можно воспользоваться методом аналитического продолжения, ранее применявшимся для $Sp(2)$ и $Sp(2,R)$ /8/.

Автор признателен В.Я. Файнбергу за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов Г.Ф., Овчаренко В.И., Смирнов Ю.Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев, Наукова Думка, 1981.
2. Джадд Б., Вайборн Б. Теория сложных атомных спектров. М., Мир, 1973.
3. Bacry H., Cadilhac M. Phys. Rev., **A23**, 2533 (1981).
4. Шелепин Л.А. Труды ФИАН, **70**, 3 (1973).
5. Карасев В.П. Труды ФИАН, **70**, 147 (1973).
6. Шелепин А.Л., Шелепин Л.А. Труды ФИАН, **183**, 142 (1986).
7. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Holman W.J., Biedenhurn L.C. Annals Phys., **39**, 1 (1966).