УДК 533.9

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Г. Кирцхалия, А. А. Рухадзе

Исследуются неустойчивости тангенциального разрыва по отношению к возбуждениям поверхностных и объемных волн в сжимаемой жидкости. Поверхностные волны возбуждаются при любых скачках скорости в потоке жидкости. Однако при заданном угле распространения волн существует критическое значение скачка скорости, выше которого поверхностные волны в потоке возбуждаться не могут. Объемные же волны возбуждаются при скачках скорости, превышающих скорость звука в жидкости, причем механизм их возбуждения связан с вынужденным черенковским излучением потока в покоящейся части жидкости. Определены условия возбуждения обоих типов неустойчивости и максимальные инкременты их развития.

Л. Д. Ландау в 1944 году рассмотрел задачу устойчивости тангенциального разрыва в потоке жидкости со скачком скорости и показал, что в случае несжимаемой жидкости разрыв всегда неустойчив (см. [1], §29), а по отношению к возбуждению поверхностной волны в сжимаемой жидкости разрыв неустойчив в условиях (см. [1], §84, задача 1)

$$0 < v^2 < 8c^2. \tag{1}$$

Здесь v – скачок скорости в тангенциальном разрыве, а c – скорость звука в жидкости. Условия (1) относятся к случаю распространения поверхностной волны вдоль разрыва. При произвольном же угле распространения ϑ в (1) следует заменить $v \to v\cos\vartheta$. С учетом этого обстоятельства в [1] справедливо заключается, что и в сжимаемой жидкости тангенциальный разрыв неустойчив всегда, причем максимальный инкремент достигается при $v^2 = 3c^2$ и равен $Im\omega_{max} = 0.5kc$, где k – компонента волнового вектора вдоль разрыва.

Однако в работе [2] было показано, что уже при скоростях разрыва

$$v^2 > (2 + \sqrt{8})c^2 \approx 4.85c^2 \tag{2}$$

дисперсионное уравнение, положенное в основу анализа устойчивости в [1], теряет смысл, поскольку предположение о поверхностности волн возмущений перестает быть справедливым; волна становится объемной[1]. Поэтому для правильного решения задачи устойчивости тангенциального разрыва при больших скоростях, $v > c$, следует решать ограниченную в поперечном к разрыву направлении задачу и учесть возможность вынужденного излучения звука с поверхности разрыва. Эта задача и решается в настоящей работе.

Рассмотрим плоский слой идеальной жидкости с толщиной $2a$, причем в области $0 \leq x \leq a$ жидкость движется со скоростью $\vec{v} \| 0z$ относительно покоящейся части жидкости, занимающей область $-a \leq x \leq 0$. Считая, что на ограничивающих слой поверхностях при $x = \pm a$ возмущения жидкости обращаются в нуль, легко получить дисперсионное уравнение

$$\frac{a\kappa_1 \mathrm{tg}\kappa_1 a}{(\omega - kv)^2} = -\frac{\kappa_2 a \mathrm{tg}\kappa_2 a}{\omega^2}. \tag{3}$$

Здесь ω – искомая частота, а k – компонента волнового вектора возмущений вдоль разрыва, т.е. параллельно скорости $\vec{v}$ (повторим, что при распространении возмущений в плоскости разрыва под углом ϑ к скорости $\vec{v}$ следует в (3) произвести замену $v \to v\cos\vartheta$). Величины κ_1 и κ_2 даются выражениями:

$$\kappa_1^2 = \frac{(\omega - kv)^2}{c^2} - k^2, \; \kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \tag{4}$$

Для поверхностных волн $Im\kappa_{1,2} > 0$, причем в пределе неограниченного потока жидкости ($a \to \infty$) из (3) следует уравнение

$$\frac{\kappa_1}{(\omega - kv)^2} = -\frac{\kappa_2}{\omega^2}, \tag{5}$$

[1] На это обстоятельство при нарушении условий (1) еще раньше было обращено внимание в работе [3].

подробно проанализированное в [1, 2]. В противоположном пределе малой толщины слоя, $|\kappa_{1,2}|a << 1$ из (3) имеем

$$\frac{\kappa_1^2}{(\omega - kv)^2} = -\frac{\kappa_2^2}{\omega^2}. \tag{6}$$

Подставляя в (6) выражения (4), находим, что тангенциальный разрыв в слое малой толщины неустойчив по отношению к длинноволновым возмущениям при условиях

$$0 < v^2 < 4c^2, \tag{7}$$

причем максимальный инкремент достигается при $v^2 = \frac{3}{8}c^2$ и равен

$$Im\omega_{max} = \frac{kc}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Заметим, что длинноволновая неустойчивость чувствительна к граничным условиям, принятым выше, которые носят модельный характер. Поэтому полученный результат следует рассматривать как качественный.

Принципиально более интересной нам представляется неустойчивость тангенциального разрыва по отношению к коротковолновым объемным возмущениям, которая обусловлена вынужденным черенковским излучением звука с поверхности разрыва. С этой целью проанализируем уравнение (3) в условиях

$$\kappa_2^2 > 0,\ \kappa_1^2 = -k^2 < 0,\ \kappa_2 a >> 1,$$

$$|\omega - kv| << kc, \tag{9}$$

когда в области $0 \le x \le a$ описываемые уравнением (3) волны поверхностные, а в области $-a \le x \le 0$ – объемные (звуковые). В условиях (9) происходит резонансное возбуждение звука в жидкости, т.е.

$$\omega = kv + \delta = \sqrt{k^2c^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}c^2} + \delta, \tag{10}$$

где $\delta << \omega$, а $n = 1, 2, 3...$ целые числа, причем из условия $\kappa_2 a >> 1$ следует, что в (10) следует брать $n >> 1$. (Это позволяет перейти к пределу неограниченной жидкости, $a \to \infty$, заменив $\frac{\pi n}{a} \to k_x$.) Уравнение (3) в условиях (9) сводится к виду

$$\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^3 = \frac{c^2}{a^2\omega^2} ak\text{th}ka. \tag{11}$$

Один из корней этого уравнения имеет $Im\delta > 0$ и соответствует нарастанию возмущений во времени

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c^2}{a^2\omega^2} ak\text{th}ka\right)^{1/3}. \tag{12}$$

Видно, что $Re\omega < kv$, что и свидетельствует о черенковской природе неустойчивости. Кроме того, так как $\omega >> kc$, то для развития неустойчивости требуется, чтобы $v >> c$.

В пределе $ak >> 1$ из (12) находим

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c^2 k}{a\omega^2}\right)^{1/3}. \tag{13}$$

Этот результат можно получить из формулы для усредненной плотности нормального потока энергии в преломленной волне, полученной в [1] (см. §84, задача 2) при решении задачи Френеля на поверхности тангенциального разрыва:

$$\vec{q}_2 = \frac{c^2 k\omega}{(\omega - kv)^2}\cdot\frac{|B|^2}{2\rho c^2}\vec{e}_x. \tag{14}$$

Последний множитель в этом выражении представляет собой плотность энергии преломленной волны. Формула (14) позволяет записать закон сохранения энергии для преломленной волны в слое толщины a покоящейся части жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{|B|^2}{2\rho c^2} + \text{div}\vec{q}_2 = 0. \tag{15}$$

Отсюда для слоя толщины a при учете (10) для медленно меняющейся амплитуды волны возмущения $\frac{\partial}{\partial t} \to \delta$ и из (15) получим

$$\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^3 = \frac{c^2 k}{a\omega^2}, \tag{16}$$

что соответствует (12) в пределе $ak >> 1$.

В заключение заметим, что рассмотренная излучательная неустойчивость тангенциального разрыва обладает малым инкрементом развития по сравнению с инкрементом нарастания неустойчивости тангенциального разрыва по отношению к возбуждению поверхностной волны. Их отношение порядка $(ak)^2 < 1$.

Работа выполнена при поддержке грантов Миннауки "Университеты России" и "Ведущие Научные Школы".

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, М., Наука, 1988.

[2] Жвания И. А., Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 10, 35 (2002).

[3] Kirtskhalia V. Planet Space Sci., **42**, N 6, 513 (1994).

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 12 мая 2003 г.