Краткие сообщения по физике № 6-1986 г.

УДК 533.951

О СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДЕ

В.Ю. Шафер

В длинноволновом приближении получены нелинейные стационарные волны пространственного заряда трубчатого электронного пучка, распространяющегося в цилиндрическом волноводе.

Трубчатые электронные пучки, распространяющиеся в волноводах вдоль сильного внешнего магнитного поля, широко применяются в сильноточной СВЧ электронике. В связи с этим исследование стационарных состояний таких пучков представляется интересным. В данной работе пучок считается бесконечно тонким, моноэнергетическим, нерелятивистским; волновод – идеально проводящим; внешнее магнитное поле, приложенное вдоль общей оси симметрии волновода и пучка (ось Oz), – бесконечно сильным. Собственным магнитным полем пучка пренебрегается. Рассматриваются только азимутально симметричные состояния.

Такой пучок описывается следующей системой гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(NV) = 0, \quad N = N_0 + \delta N(z,t), \quad V = V_0 + \delta V(z,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{e}{m}\frac{\partial \Phi(R,z,t)}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2eN\frac{\delta(r-R)}{R}, \tag{3}$$

$$\Phi(R_0,z,t) = 0, \quad |\Phi(r,z,t)| < \infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Здесь R_0 – радиус волновода; R – радиус пучка; $e > 0$, m – заряд и масса электрона; $N(z,t)$, $V(z,t)$, $\Phi(R,z,t)$ – погонная плотность числа электронов, гидродинамическая скорость и потенциал пучка. Состояние пучка описывается величиной отклонения $(\delta N, \delta V)$ от некоторого исходного однородного состояния (N_0, V_0), при этом ток пучка $I = eNV$ считается равным току $I_0 = eN_0V_0$ в невозмущенном состоянии. Энергии электронов в обоих состояниях также равны. Стационарными называем состояния, в которых все возмущенные величины зависят от переменной $z - ct$, причем постоянная скорость волны c может, в частности, быть равной нулю.

В линейном приближении все стационарные состояния системы (1)–(3) вида $\delta N, \delta V \propto \exp(ikz - i\omega t)$ задаются линейным дисперсионным соотношением (ДС) /1/:

$$\omega_\pm(k) = kV_0\left(1 \pm \sqrt{\frac{2e^2N_0}{mV_0^2}\Sigma(k)}\right), \quad \Sigma(k) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{C_s}{k^2+\lambda_s^2}, \quad C_s = \frac{2J_0^2(\lambda_s R)}{R_0^2 J_1^2(\lambda_s R_0)}. \tag{4}$$

Здесь $\omega_\pm$ – частоты быстрой (+) и медленной (–) волн пространственного заряда пучка; $J_{0,1}$ – функции Бесселя; $\lambda_s > 0$ – корни уравнения $J_0(\lambda_s R_0) = 0$. Из (4) следует, что при заданной скорости пучка V_0 существует значение тока $I^*(V_0) = eN^*(V_0)V_0$, равное

$$I^*(V_0) = mV_0^3/2e\ln(R_0/R), \tag{5}$$

при превышении которого (т.е. при $N_0 > N^*(V_0)$) медленные волны с $0 < k^2 < k_*^2$ имеют отрицательную фазовую скорость, а фазовая скорость волны с $k = k_*$ равна нулю ($\delta N, \delta V \propto \cos(k_* z)$). Значение k_* определяется из уравнения $(2e^2 N_0/mV_0^2)\Sigma(k_*) = 1$. Ток $I^*(V_0)$ будем называть критическим, а однородное состояние (N_0, V_0) задавать параметром надкритичности

$$\Delta = [I_0 - I^*(V_0)]/I^*(V_0). \tag{6}$$

В длинноволновом приближении в первом порядке по $\epsilon \sim k_*^2/k_\perp^2 \ll 1$ для всех k, удовлетворяющих условию $k^2 \lesssim k_*^2$, из (4) имеем:

$$\omega_\pm(k) = c_0^\pm k \mp \frac{V_0}{2k_\perp^2} k^3, \quad k_\perp^2 = \frac{4\ln(R_0/R)}{R_0^2 - R^2[1 + 2\ln(R_0/R)]},$$
$$c_0^+ = 2V_0(1 + \Delta/4), \quad c_0^- = -V_0\Delta/2, \quad k_*(\Delta > 0) = \sqrt{\Delta} k_\perp, \quad |\Delta| \sim \epsilon \ll 1. \tag{7}$$

Минимальное значение $k_\perp^{min} = 2{,}59/R_0$ реализуется при $R/R_0 = 0{,}41$.

Характер ДС (7) свидетельствует о наличии у системы (1)–(3) решений и в виде нелинейных стационарных волн – уединенных и периодических /2/. Построение таких решений начнем со случая $c = 0$. Положив в уравнениях (1), (2) $\partial/\partial t = 0$ и проинтегрировав по z, получим

$$N(z)V(z) = \text{const} = N_0 V_0, \tag{8}$$

$$mV^2(z)/2 - e\Phi(z) = \text{const} = mV_0^2/2 - e\Phi_0, \quad \Phi_0 = -2eN_0\ln(R_0/R),$$

где Φ_0 – потенциал однородного пучка плотности N_0 (при $r = R$).

Точное решение уравнения Пуассона (3) имеет вид:

$$\Phi(r = R, z) = -e\sum_{s=1}^{\infty}(c_s/\lambda_s)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_s|z-\xi|} N(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

В том же длинноволновом приближении, в котором было получено ДС (7), т.е. в первом порядке по малому параметру

$$\epsilon = \left|\frac{1}{\delta N(z)} \frac{d^2\delta N(z)}{k_\perp^2 dz^2}\right| \ll 1, \tag{10}$$

из формулы (9) находим следующее выражение для потенциала $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = -2e\ln\frac{R_0}{R}\left[N(z) + \frac{d^2\delta N(z)}{k_\perp^2 dz^2}\right], \quad N(z) = N_0 + \delta N(z). \tag{11}$$

Выражения (8), (11) преобразуются в одно уравнение ангармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} + x - \frac{x + x^2/2}{(1+\Delta)(1+x)^2} = 0, \quad x \equiv \frac{\delta N(z)}{N_0}, \quad \zeta \equiv k_\perp z. \tag{12}$$

Исследование этого уравнения показывает, что его ограниченные решения по порядку величины не превосходят Δ: $|x_{max}| \sim |\Delta|$, а условие длинноволновости (10) выполняется лишь при $|\Delta| \sim \epsilon \ll 1$. Это, конечно, не означает, что при больших надкритичностях система (1)–(3) не имеет коротковолновых статических $(c = 0)$ решений, выходящих за рамки условия (10).

Во втором порядке по $|\Delta| \ll 1$ уравнение (12) принимает вид

$$d^2 x/d\zeta^2 + \Delta x + 3x^2/2 = 0. \tag{13}$$

Нетривиальные ограниченные решения (13) существуют лишь при $\Delta > 0$. Они имеют вид солитонов

$$x = -2\Delta/3 + \Delta \operatorname{sech}^2(k_* z/2), \quad k_* = \sqrt{\Delta}\, k_\perp \tag{14}$$

и периодических волн

$$x = -\Delta(1 + 3\delta - \sqrt{1 - 3\delta^2})/3 + 2\Delta\delta\, \mathrm{cn}^2[(\delta + \sqrt{1-3\delta^2})^{1/2} k_* z/2, s], \tag{15}$$

$$\delta \equiv a/\Delta, \quad 0 < 2a \equiv x_{max} - x_{min} \leqslant \Delta, \quad s^2 = 2\delta/(\delta + \sqrt{1 - 3\delta^2});$$

длина волны λ и среднее значение $\bar{x}$ равны:

$$\lambda k_* = 4K(s)/(\delta + \sqrt{1 - 3\delta^2})^{1/2},$$

$$\bar{x} = (1/\lambda) \int_0^\lambda x(z)\, dz = -\Delta[(1 + 2\sqrt{1 - 3\delta^2})/3 - (\delta + \sqrt{1-3\delta^2}) E(s)/K(s)].$$

Здесь cn – эллиптический косинус; $K(s)$, $E(s)$ – полные эллиптические интегралы. Относительная амплитуда δ служит параметром нелинейности волны: при $2\delta = 1$ решение (15) переходит в (14), при $\delta \to 0$ $x \to a\cos(k_* z)$.

На горбе солитона $(z = 0)$ плотность пучка равна $N(0) = (1 + \Delta/3) N_0$, скорость $V(0) \cong (1 - \Delta/3) V_0$, и, следовательно, ток пучка $I = (1 + \Delta) I^*(V_0)$ превышает локальный критический ток $I^*[V(0)] \approx (1 - \Delta) I^*(V_0)$, вычисленный по формуле (5) для этой скорости: $I/I^*[V(0)] \approx 1 + 2\Delta$, $0 < \Delta \ll 1$. На хвостах солитона (при $z \to \pm\infty$) наоборот – ток меньше локального критического: $N(\infty) = (1 - 2\Delta/3) N_0$, $V(\infty) \approx (1 + 2\Delta/3) V_0$, $I^*[V(\infty)] \approx (1 + 2\Delta) I^*(V_0)$, $I/I^*[V(\infty)] \approx 1 - \Delta$.

Задача построения решений для бегущих нелинейных волн $(c \neq 0)$ сводится к решенной задаче переходом в системы отсчета, связанные с этими волнами. При этом изменится только значение параметра надкритичности – вместо (6) везде будет фигурировать $\Delta^\pm = [N_0 - N^*(V_0)\gamma^2]/N^*(V_0)\gamma^2$, $\gamma = 1 - c^\pm/V_0$. Соответственно для быстрой (+) и медленной (–) волн в первом порядке по Δ получим:

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \Delta - 2(c^+/V_0 - 2) + 0(\Delta^2), \quad |c^+/V_0 - 2| \sim |\Delta| \ll 1; \\ \Delta^- &= \Delta + 2c^-/V_0 + 0(\Delta^2), \quad |c^-/V_0| \sim |\Delta| \ll 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Задача в случае бегущих волн сводится к тому же уравнению (13) с $\Delta^\pm$ вместо Δ и $\xi = z - c^\pm t$ вместо z. Решения даются формулами (14), (15), в которых нужно произвести эту замену. Условие существования этих решений $(\Delta > 0)$ принимает вид: $c^+ < 2V_0(1 + \Delta/4) \equiv c_0^+$, $c^- > -V_0\Delta/2 \equiv c_0^-$, причем сама величина Δ может теперь быть как положительной, так и отрицательной. Соотношения (16) устанавливают связь между скоростью $c^{\pm}$ и амплитудой $\Delta^{\pm}$ солитонов: $c^{\pm} = c_0^{\pm} \mp V_0 \Delta^{\pm}/2$.

При малых значениях относительной амплитуды $\delta \equiv a/\Delta^{\pm} \ll 1$ разложение периодической волны (15) по δ имеет вид:

$$
\begin{gathered}
x(\delta \ll 1) = \bar{x} + a\cos(k\xi) + (a^2 k_\perp^2/4k^2)\cos(2k\xi) + 0(\delta^3), \\
\bar{x} = -3a^2 k_\perp^2/4k^2, \quad k \equiv 2\pi/\lambda, \quad \xi \equiv z - c^{\pm} t; \\
c^{\pm} = c_0^{\pm} \mp \frac{V_0}{2}\,\frac{k^2}{k_\perp^2}\left(1 + \frac{a^2 k_\perp^4}{2k^4} + 0[\delta^3]\right); \\
\Delta^{\pm} = (1 + 0[\delta^2])\,k^2/k_\perp^2 \ll 1, \quad ak_\perp^2/k^2 = \delta + 0[\delta^3].
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Выражения (17) играют роль нелинейных дисперсионных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А. А., Шафер В. Ю. Физика плазмы, **10**, 982 (1984).
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 28 марта 1986 г.