

ИСКАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Е. А. Заболотская

УДК 534.222.

Выведено приближенное уравнение, описывающее нелинейное распространение квазиплоской продольной волны в изотропном твердом теле.

Математический аппарат, разработанный в нелинейной акустике жидкостей и газов, оказался очень удобным для исследования процессов распространения и искажения как плоских волн конечной амплитуды [1, 2], так и звуковых пучков [3 – 5]. Нелинейное распространение квазиплоских волн описывается приближенным уравнением:

$$a \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z \partial \tau} + c \Delta_{\perp} \rho' + \kappa \frac{\partial^3 \rho'}{\partial \tau^3} = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ' – возмущение плотности; c – скорость звука; $\tau = t - z/c$ – сопровождающее время; a и κ – коэффициенты, связанные соответственно с квадратичной нелинейностью исходных уравнений гидродинамики и с затуханием волн. Для уравнения (1) получены частные точные, а также асимптотические решения. Кроме того, для широкого класса граничных условий оно исследовалось численно [5].

В твердых телах, как показали эксперименты, основные закономерности нелинейного распространения звуковых пучков такие же, как в жидкостях и газах: наблюдается характерная несимметричная форма волны [6]. В работе выводится приближенное уравнение, описывающее форму продольной волны, распространяющейся в нелинейном изотропном твердом теле и ограниченной в пространстве в виде пучка. Это уравнение с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением (1).

Распространение упругих волн в изотропном твердом теле описывается уравнением [7]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность недеформированного твердого тела; u_i — вектор смещения; $\sigma_{ik} = \partial \mathcal{E} / \partial (\partial u_i / \partial x_k)$ — тензор упругих напряжений; $\sigma'_{ik} = 2\eta(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll}) + \zeta \delta_{ik} \dot{u}_{ll}$ — "диссипативный" тензор напряжений [7]. Упругая энергия \mathcal{E} и тензор деформации u_{ik} связаны соотношением:

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \mu \right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{kl} u_{li} + B u_{ll} u_{ik}^2 + \frac{C}{3} u_{ll}^3,$$

причем u_{ik} выражается через компоненты вектора смещения:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

где η и ζ — коэффициенты вязкости.

Уравнение движения (2) представим в виде:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta u_i - (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \vec{u}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik}^{(H)} - \sigma'_{ik}), \quad (3)$$

где $c_t^2 = \mu / \rho$, $c_l^2 = (K + \frac{4}{3} \mu) / \rho$ — скорости поперечных и продольных волн соответственно; $\sigma_{ik}^{(H)}$ — нелинейная часть тензора напряжений. Выражение для $\partial \sigma_{ik}^{(H)} / \partial x_k$ приведено в [8].

Так как скорости продольных и поперечных волн сильно различаются ($c_l > \sqrt{2} c_t [7 - 9]$), то для коллинарных волн нет накапливающихся эффектов взаимодействия. Поэтому можно рассматривать отдельно распространение и искажение продольных и поперечных волн.

При анализе продольных волн допустим, что пучок распространяется вдоль оси z , и предположим, что решение нелинейного уравнения (3) близко к решению линейного уравнения. Тогда компоненты вектора смещения могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} u_z &= \epsilon u_z(\tau, x', y', z'), \\ u_x &= \epsilon^{3/2} u_x(\tau, x', y', z'), \\ u_y &= \epsilon^{3/2} u_y(\tau, x', y', z'), \end{aligned} \quad (4)$$

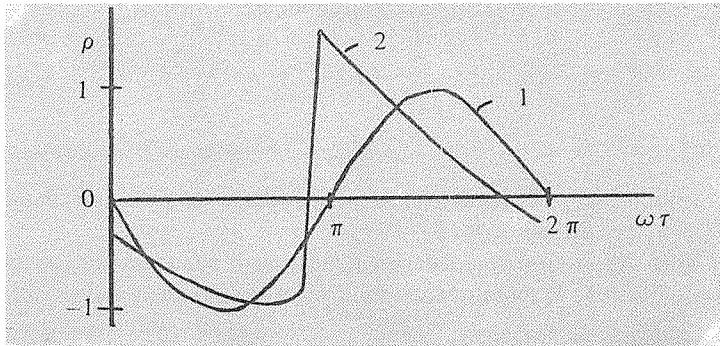
где $\tau = t - z/c_l$; $z' = ez$; $x' = \sqrt{\epsilon}x$; $y' = \sqrt{\epsilon}y$; ϵ — малый безразмерный параметр, определяющий порядок малости величины возмущения.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и сохраняя члены, порядок малости которых не превосходит ϵ^2 , получим уравнения для компонент вектора смещения:

$$\begin{aligned}
 & -c_l^2 \Delta_{\perp} u_z + 2c_l \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau \partial z'} + (c_l - \frac{c_l^2}{c_t}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x'} + \frac{\partial u_y}{\partial y'} \right) = \\
 & = - (F/c_l^3 \rho) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right)^2 + \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) / c_l^2 \rho \right] \frac{\partial^3 u_z}{\partial \tau^3}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} + c_l \frac{\partial^2 u_z}{\partial x' \partial \tau} = 0. \quad (6)$$

Здесь $F = 2\mu + \frac{3}{2}K + A + 3B + C$. При выводе уравнений (5), (6) предполагалось, что коэффициенты вязкости η и ζ являются малыми величинами. Уравнение для u_y имеет такой же вид, как (6), если x' заменить на y' .



Р и с. 1. Волновой профиль на оси однородного пучка при $z = 0$ (кривая 1) и на расстоянии $z \cong 1/4$ дифракционной длины (кривая 2).

После интегрирования уравнения (6) по τ и пренебрежения статической частью смещения получим соотношения, позволяющие исключить u_x и u_y из уравнения (5).

Окончательно уравнение (5) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial z} - \frac{c_l}{2} \Delta_{\perp} v + \frac{F}{2c_l^4 \rho} \frac{\partial^2 v^2}{\partial \tau^2} - \frac{4\eta/3 + \zeta}{2\rho c_l^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = 0, \quad (7)$$

где $v = \partial u_z / \partial t$. Пренебрежение статической частью смещения оправдано тем, что члены, полученные от взаимодействия статических членов с переменными, выходят за пределы точности задачи.

Уравнение (7) с точностью до коэффициентов совпадает с нелинейным уравнением акустики ограниченных пучков в жидкости (1). Поэтому здесь могут быть использованы результаты, полученные в нелинейной акустике жидкостей и газов /5/. В частности, если на границе нелинейной среды возбуждается гармонический сигнал, то возмущение в пучке принимает характерную форму, показанную на рис. 1 /5/.

Поступила в редакцию 6 февраля 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солуян С.И., Хохлов Р.В. Вестник МГУ, 3, № 3, 52 (1961).
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
3. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Акустический журнал, 15, № 1, 40 (1969).
4. Кузнецов В.П. Акустический журнал, 16, № 4, 548 (1970).
5. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М., Наука, 1982.
6. Карабутов А.А. и др. Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрономия, 25, № 3, 89 (1984).
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1965.
8. Зарембо Л.К., Тимошенко В.И. Нелинейная акустика. М., Изд-во МГУ, 1984.
9. Николаев А.В., Хаврошин О.Б., Цыпляков В.В. ДАН СССР 269, № 1, 65 (1983).