Краткие сообщения по физике № 7-1985 г.

СМЕНА ПЕРИОДИЧНОСТИ И ХАОС В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ

П.В. Силин

УДК 533.9

На примере слабонелинейных состояний электромагнитного поля околозвукового потока плазмы для стоячих волн аналитически демонстрируется смена пространственной периодичности и возможность реализации беспорядочных структур.

Для околозвукового потока плазмы, как было показано в /1/, описание слабонелинейных состояний электрического поля ($E(x) \equiv \nu V(16\pi n_c M z^{-1})^{1/2} \times \Psi(\xi)$, где $\xi = (2\nu/3)^{1/2}(\omega_0/c)x\cos\Theta$), базируется на сравнительно простом материальном уравнении для электронов:

$$n_\pm(\Psi^2)/n_c\cos^2\Theta = 1 + \Delta - \nu \pm \nu\sqrt{1-\Psi^2(\xi)}. \qquad (1)$$

Здесь скорость невозмущенной полем плазмы $V = (1-\nu)v_s$ мало отличается от скорости звука v_s ($\nu \ll 1$), а невозмущенная плотность $N = n_c z^{-1}\cos^2\Theta(1 + \Delta)$ мало отличается ($\Delta \ll 1$) от отвечающего углу падения Θ значения плотности отсечки $n_c\cos^2\Theta$. При этом скорость потока $v_\pm(\Psi^2) = v_s[1 \mp \nu\sqrt{1-\Psi^2(\xi)}]$. Для нелинейных состояний поля стоячих волн в отсутствие поглощения из волнового уравнения следует:

$$(\Psi')^2 \pm (1-\Psi^2)^{3/2} - A(1-\Psi^2) = 0, \qquad (2)$$

где $A = (3/2)(1 - \Delta/\nu)$. При этом знак плюс отвечает дозвуковому течению, а минус – сверхзвуковому. Уравнения (1), (2) допускают достижение скоростью потока величины, равной скорости звука, при $\Psi^2 = 1$. Случай $A = 1$ был рассмотрен в /1/. Обсудим решения уравнений (2) при $A \neq 1$.

При $0 < A < 1$, т.е. при $0 < \nu/3 < \Delta$, решение уравнений (2) можно записать в виде периодической функции с периодом $4\sqrt{2}K(k)$

$$\Psi(\xi) = 2k\,\mathrm{sn}(\xi/\sqrt{2}, k)\,\mathrm{dn}(\xi/\sqrt{2}, k), \qquad (3)$$

где $k = \sqrt{(1/2)(1 + A)}$. Эта формула в области $0 < sn^2(\xi/\sqrt{2}, k) < (1/2)k^{-2}$ отвечает сверхзвуковому течению, а в области $(1/2)k^{-2} < sn^2(\xi/\sqrt{2}, k) < 1$ — дозвуковому течению, описывая периодические переходы от сверхзвукового участка течения к дозвуковому в точках $\pm\,\xi_0 + 2\sqrt{2}K(k)\,n$, где n — целое, а ξ_0 определяется уравнением

$$2k^2\, sn^2(\xi/\sqrt{2}, k) = 1. \tag{4}$$

В точках перехода $\Psi^2 = 1$ и $\Psi' = 0$. Используя такое свойство решений в звуковой точке, а также свойство периодичности решения (3), можно построить иные, также периодические решения. Так, можно записать сверхзвуковое решение с периодом $4\xi_0$ в виде

$$\Psi(\xi) = 2k\, sn(2^{-1/2}[\xi - 4n\xi_0], k)\, dn(2^{-1/2}[\xi - 4n\xi_0], k), \quad (4n-1)\xi_0 < \xi < (4n+1)\xi_0,$$

$$\Psi(\xi) = -2k\, sn(2^{-1/2}[\xi - 2(2n+1)\xi_0], k)\, dn(2^{-1/2}[\xi - 2(2n+1)\xi_0], k), \tag{5}$$

$$(4n+1)\xi_0 < \xi < ((4n+1) - 1)\xi_0.$$

Аналогично, сшивая дозвуковые участки (3), получаем дозвуковое решение с периодом $2\sqrt{2}K(k) - 2\xi_0$:

$$\Psi(\xi) = (-1)^n 2k\, sn(2^{-1/2}[\xi + 2n\xi_0], k)\, dn(2^{-1/2}[\xi + 2n\xi_0], k), \tag{6}$$

$$2n\sqrt{2}K(k) + \xi_0 < \xi + 2n\xi_0 < 2(n+1)\sqrt{2}K(k) - \xi_0.$$

Конечный периодический цуг (6) в точках перехода может быть сшит с конечным цугом (5), что будет отвечать переходу от дозвукового течения к сверхзвуковому, и, что особенно важно, при этом возникает смена периодичности. Каждый из таких цугов (5) и (6) в точке перехода может быть сшит с цугом, описываемым формулой (3), что дает еще две возможности смены периодичности. Так как длина сшиваемых цугов может быть любой, то возникающий при этом произвол сшивки решений является причиной хаоса.

В случае $A > 1$ периодическое с периодом $2\sqrt{2}k_1K(k_1)$ решение (ср. /2/)

$$\Psi(\xi) = 2\,\mathrm{sn}(2^{-1/2}k_1^{-1}\xi, k_1)\,\mathrm{cn}(2^{-1/2}k_1^{-1}\xi, k_1), \tag{7}$$

где $k_1 = \sqrt{2/(1 + A)}$. В области $0 < \mathrm{sn}^2(2^{-1/2}k_1^{-1}\xi, k_1) < 1/2$ это решение описывает сверхзвуковое течение, а в области $1/2 < \mathrm{sn}^2(2^{-1/2}k_1^{-1}\xi, k_1) < 1$ – дозвуковое течение. В точках смыкания этих областей $\xi = \pm\ \tilde{\xi}_0 + 2\sqrt{2}k_1K(k_1)n$, где n – целое, а

$$\mathrm{sn}^2(\tilde{\xi}_0/\sqrt{2}k_1, k_1) = 1/2, \tag{8}$$

возникает переход от сверхзвукового к дозвуковому течению. При этом снова $\psi^2 = 1$, $\psi' = 0$, что позволяет построить цуг волн сверхзвукового потока с периодом $4\tilde{\xi}_0$:

$$\Psi(\xi) = 2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\xi - 2n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right)\mathrm{cn}\left(\frac{\xi - 2n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right), \quad (4n-1)\tilde{\xi}_0 < \xi < (4n+1)\tilde{\xi}_0$$

$$\Psi(\xi) = -2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\xi - 2(n+1)\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right)\mathrm{cn}\left(\frac{\xi - 2(n+1)\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right), \tag{9}$$

$$(4n+1)\tilde{\xi}_0 < \xi < [4(n+1) - 1]\tilde{\xi}_0.$$

Соответствующая сшивка дозвуковых участков функции (7) дает решение с периодом $2[2\sqrt{2}k_1K(k_1) - 2\tilde{\xi}_0]$, описываемое формулами

$$\Psi(\xi) = 2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\xi + 4n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right)\mathrm{cn}\left(\frac{\xi + 4n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right)$$

при $\tilde{\xi}_0 + 2n[\sqrt{2}k_1 2K(k_1) - 2\tilde{\xi}_0] < \xi < \tilde{\xi}_0 + (2n+1)[\sqrt{2}k_1 2K(k_1) - 2\tilde{\xi}_0]$,

$$\Psi(\xi) = -2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\xi + 4n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right)\mathrm{cn}\left(\frac{\xi + 4n\tilde{\xi}_0}{\sqrt{2}k_1}, k_1\right) \tag{10}$$

при $\tilde{\xi}_0 + (2n + 1)[\sqrt{2}k_1 2K(k_1) - 2\tilde{\xi}_0] < \xi < \tilde{\xi}_0 + 2(n + 1)[\sqrt{2}k_1 2K(k_1) - 2\tilde{\xi}_0]$.

В точках перехода (8) сшивка решений (7), (9), (10) демонстрирует явление смены периодичности поля, дает возможность построения солитонных и других упорядоченных структур, а также беспорядочных, хаотических состояний поля.

В заключение отметим, что формула (1) описывает ветвление материального уравнения. При этом, согласно (2), можно говорить о ветвлении уравнения поля при $\psi^2 = 1$, а поэтому о ветвлении решений. В соответствии с положением о ветвлении материального уравнения из уравнений (3) и (7) видно, что переход от одной ветви к другой отвечает переходу от дозвукового течения к сверхзвуковому, когда не только плотность и скорость, но и их производные меняются непрерывно. Напротив, ограничение одной ветвью материального уравнения (решения (5), (6), (9), (10)) ведет к тому, что возникают слабые разрывы /3/ (скачки первых производных скорости и плотности).

Аналогично тому, как в обычной гидродинамике слабые разрывы сглаживаются при учете вязкости и теплопроводности, так и в нашем случае бесстолкновительной гидродинамики слабые разрывы сглаживаются при учете отклонения от электронейтральности плазмы. При этом вблизи характеристической поверхности (где $\psi^2 = 1$) в области с размером, определяющимся дебаевским радиусом, происходит сращивание производных скорости и плотности плазмы, значения которых в этой области проходят через ноль.

Поступила в редакцию 26 апреля 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreev N. E., Silin V. P., Silin P. V. In Nonlinear Waves, ed. Debnath, Cambridge Univ. Press, 1983, p. 133.
2. Nishikawa K. et al. Phys. Rev. Lett., 33, № 3, 148 (1974).
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954, с. 423.