УДК 533.951

К ТЕОРИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Ш. Г. Амиранашвили, Н. Г. Гусейн-заде, Е. Г. Шустин

Рассмотрено влияние теплового разброса частиц пучка на инкременты пучковой неустойчивости. Для случая, промежуточного между хорошо известными гидродинамическим и кинетическим пределами, приведены явные аналитические зависимости.

Рассмотрим задачу о возбуждении в плазме продольных колебаний электронным пучком малой плотности. Если продольная диэлектрическая проницаемость плазмы есть $\epsilon(\omega, k)$ и если пучок имеет максвелловское распределение по скоростям, то, как хорошо известно, в одномерном случае колебания системы плазма-пучок описываются дисперсионным уравнением [1]:

$$\epsilon(\omega, k) + \frac{\omega_b^2}{(kv_{tb})^2}\left[1 - J_+\left(\frac{\omega - ku}{kv_{tb}}\right)\right] = 0, \tag{1}$$

где ω_b, u – частота и скорость пучка, $v_{tb} = \sqrt{T_b/me}$,

$$J_+(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-s^2/2)ds}{\beta - s + i0}. \tag{2}$$

Мнимая часть $J_+(\beta)$ вычисляется явно, а вещественная может быть выражена через $\mathrm{erf}(t)$ [2]. Проще всего получить такое представление, если заметить, что $J_+(\beta)$ подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\beta J_+'(\beta) = (1 - \beta^2)J_+(\beta) + \beta^2, \tag{3}$$

откуда

$$J_+(\beta) = \beta \exp(-\beta^2/2) \int\limits_0^\beta \exp(t^2/2)dt - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta \exp(-\beta^2/2). \tag{4}$$

Здесь первое слагаемое – это частное решение (3), а второе – решение соответствующего однородного уравнения, взятое с "правильным" коэффициентом.

Наиболее ярко пучковая неустойчивость проявляется в гидродинамической области

$$\frac{\omega - ku}{kv_{tb}} >> 1, \tag{5}$$

когда справедливо асимптотическое разложение

$$J_+(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + ..., \tag{6}$$

с учетом которого (1) принимает хорошо известный гидродинамический вид:

$$\epsilon(\omega, k) - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)^2} = 0. \tag{7}$$

Если плотность пучка мала по сравнению с плотностью плазмы, то по поводу решений (7) можно сделать следующие утверждения:

1) Любая собственная мода, т.е. решение уравнения $\epsilon(\omega, k) = 0$ получит небольшую поправку. При этом, вообще говоря, устойчивые колебания останутся устойчивыми.

2) Появятся две новые моды, которые по необходимости "сосредоточены" в области резонанса $\omega = ku$, т.е. имеют вид:

$$\omega = ku + \delta, \ \delta << ku. \tag{8}$$

Именно эти последние моды и оказываются неустойчивыми. А именно, из (7), (8) следует, что:

$$\delta = \omega / \sqrt{\epsilon(ku, k)}, \tag{9}$$

то есть неустойчивость имеет место, если $\epsilon|_{\omega=ku} < 0$ или если $Im\epsilon \neq 0$. Здесь опять-таки самым интересным случаем является резонансный, когда для некоторого волнового вектора k оказывается, что $\epsilon|_{\omega=ku} = 0$, то есть пучковая мода пересекается с одной из собственных мод системы. Тогда вместо (9) из (7) получаем:

$$\delta^3 = \omega_b^2 \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}\right)^{-1}_{\omega=ku}, \tag{10}$$

откуда следует, что одна из трех мод обязательно неустойчива.

Например, если $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, то для инкремента неустойчивости Γ получаются выражения:

$$\Gamma = ku \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{1/2} \quad \text{при } ku << \omega_p; \tag{11}$$

$$\Gamma = c\omega_p \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{1/3} \text{ при } ku = \omega_p, \tag{12}$$

здесь $c = Im(1/\sqrt[3]{2})$. Все сказанное выше хорошо известно, и в той или иной форме может быть найдено в любом учебнике по физике плазмы. Заметим теперь, что условия (5) и (8) $\delta >> kv_{tb}$ и $\delta << ku$ могут быть выполнены одновременно, только если тепловой разброс электронов пучка не слишком велик. А именно, должно быть выполнено жесткое ограничение:

$$\left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{\alpha} >> \frac{v_{tb}}{u},\ \alpha = 1/2, 1/3. \tag{13}$$

Между тем, в реальных задачах пучки далеко не всегда являются моноэнергетическими, например, в задаче о взаимодействии потоков заряженных частиц с плазмой ионосферы [3, 4]. Далее, в плазменно-пучковых экспериментах моноэнергетические электроны пучка неизбежно имеют скорости, не совсем параллельные заданному направлению из-за несовершенства фокусирующей системы, то есть проекции скоростей электронов на $\vec{u}$ неизбежно имеют разброс. Таким образом, представляет интерес случай, когда условие (13) нарушено. Этот случай требует решения уравнения (1) в области $\beta \geq 1$. Это можно сделать численно [5, 6]. Ниже развивается аналитический подход.

Для простоты пренебрежем черенковским резонансом и рассмотрим только $ReJ_+(\beta)$. Из (1) очевидно, что пучок может существенно повлиять на свойства плазмы только в области экстремума этой функции. Далее из (3) следует, что в точке экстремума

$$J_+(\beta) = \beta^2/(\beta^2 - 1). \tag{14}$$

Численные расчеты показывают, что экстремум достигается при $\beta = 2,1$. Рассмотрим теперь (14) как возможное приближенное выражение для $ReJ_+(\beta)$ в области $\beta \geq 2$. Помимо правильного "крайнего значения", (14) имеет нужную асимптотику и при $\beta >> 1$. Из графиков, приведенных на рисунке 1, видно, что (14) является лучшим приближением для $ReJ_+(\beta)$, чем (6), во всяком случае за точкой экстремума. Таким образом, мы получаем возможность аналитически проследить за пучковой неустойчивостью в области $\delta \geq kv_{tb}$. Начнем с длинноволновой области $ku << \omega_p$. Решая (1) с учетом (14), получаем: $\delta^2 = k^2\left(v_{tb}^2 - u^2\frac{n_b}{n_0}\right)$. Если условие (13) выполнено, то мы возвращаемся к (11). Однако неустойчивость имеет место и для "не столь моноэнергетических" пучков.

Теперь рассмотрим резонанс, когда $ku = \omega_p$. Получим уравнение: $2\delta^3 - 2\delta(kv_{tb})^2 = \omega_b^2\omega_p$. Опять-таки, если верно (13), то вторым слагаемым можно пренебречь и получить обычное значение для инкремента. Но в общем случае область неустойчивости

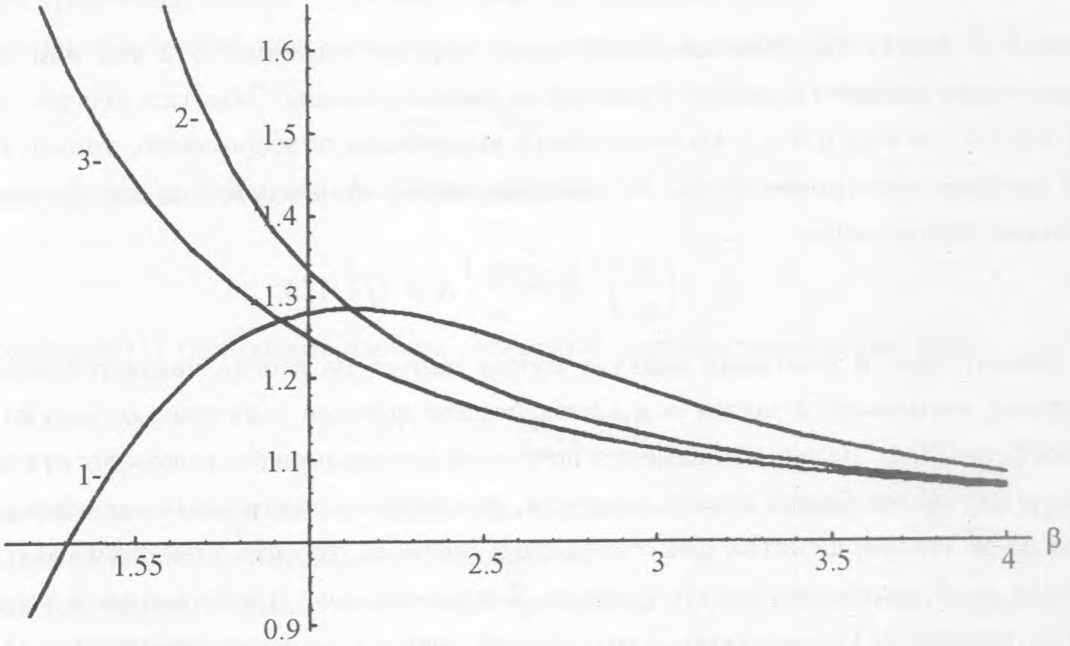

Рис. 1. *1) Действительная часть* $J_+(\beta)$; *2)* $\beta^2/(\beta^2-1)$; *3)* $1+1/\beta^2$ *(гидродинамическое приближение).*

оказывается шире. Не будем приводить громоздкое выражение для инкремента, отметим только, что неустойчивыми оказываются также и пучки, для которых $v_{tb}/u < (\sqrt{3}/2)(n_b/n_0)^{1/3}$.

В заключение заметим, что настоящая работа была мотивирована экспериментом [7], где при взаимодействии пучка с плазмой, помимо возбуждения обычного ленгмюровского пакета, наблюдалось также и возникновение интенсивных низкочастотных колебаний. Мы предполагали, что такая связь может иметь отношение к разбросу электронов по скоростям из-за несовершенной фокусировки, который в условиях эксперимента составлял 10%. Однако выяснилось, что генерация НЧ движений вызвана другим механизмом, который будет рассмотрен в отдельной работе. Основным результатом настоящей статьи являются аналитические выражения для инкрементов пучковой неустойчивости в области между гидродинамической и кинетической. Новых неустойчивостей низкочастотных ветвей при этом не возникает.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку этой работы (грант 95-02-04373а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1978.

[2] Электродинамика плазмы. Под ред. А. И. Ахиезера. М., Наука, 1974.

[3] Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 23. М., Наука, 1971, с. 305.

[4] Popadopolus K., Koffiw T. J. Geophys. Research, **79**, 674 (1974).

[5] O'Heie T. M. Phys. Fluids, **11**, 1764 (1968).

[6] Singhouse H. E. Phys. Fluids, **7**, 1534 (1964).

[7] Self F. A., Krauford R. J. Appl. Phys., **42**, 704 (1971).

[8] Исаев Н. В., Кочмарев Л. Ю., Шустин Е. Г. Физика плазмы, **23**, вып. 7, 1997.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 25 декабря 1997 г.