Краткие сообщения по физике № 6-1985 г.

О ЗАКОНАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОДОБНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДАХ

В.В. Соковиков

УДК 537.525

На основании принципа инвариантности уравнения теплообмена в газоразрядной трубке относительно группы масштабных преобразований выведен закон преобразования температуры в подобных низкотемпературных электрических разрядах.

Подобными называются разряды, происходящие в отличающихся линейными размерами газоразрядных трубках, наполненных одинаковыми газами и имеющих электроды из одного и того же материала. Известны полуэмпирические законы, связывающие между собой "внешние" (ток разряда, напряжение питания и т.п.) и "внутренние" (концентрация и температура электронов, температура газа и т.п.) параметры таких разрядов (см., напр., /1–3/). Законы эти не имеют строгого обоснования, и пределы их применимости всегда уточняются экспериментально.

Важной характеристикой разряда является распределение газовой температуры, зависящее от величины вкладываемой в разряд мощности и от характера теплообмена с окружающей средой. Обычно считается, что в подобных разрядах газовые температуры одинаковы, хотя оснований для такого общего заключения нет, поскольку уравнение теплообмена имеет аналитические решения лишь в некоторых частных случаях. Ниже мы выведем закон взаимосвязи температур в подобных разрядах, не прибегая к отысканию явного вида решений, а используя инвариантные свойства уравнения энергии относительно масштабных преобразований (или преобразований растяжения) /4, 5/. Физической основой такого подхода является известный метод подобия и размерностей /6, 7/, согласно которому описание физического явления не должно зависеть от масштаба используемых величин. Исходным в нем является принцип подобия физических явлений в сходственных пространственно-временных точках /7 – 9/, т.е. в точках, радиусы-векторы которых (x и $\widetilde{x}$) связаны линейными преобразованиями: $\widetilde{x}_i = k_i x$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Два физических явления называются подобными, если, взятые в сходственных точках величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин, характеризующих другое явление, простым умножением на одинаковые во всех точках множители, называемые коэффициентами подобия. Значит, если Φ и $\widetilde{\Phi}$ – функции, характеризующие два явления в сходственных точках x и $\widetilde{x}$, то, согласно приведенному выше определению, они также связаны линейными преобразованиями: $\widetilde{\Phi} = k_\phi \Phi$. Подобие электрических разрядов является частным случаем этого определения. Поэтому, исходя из инвариантности уравнения теплообмена относительно группы масштабных преобразований, можно получить закон взаимосвязи температур в подобных разрядах (см. также /8 – 10/).

Рассмотрим разряд в цилиндрической газоразрядной трубке. Теплообмен в ней в случае теплопроводности в радиальном направлении и конвективного теплопереноса со скоростью v вдоль оси описывается уравнением:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \tag{1}$$

где ρ – плотность; C_p – теплоемкость газа; λ – коэффициент теплопроводности; $Q(r) = Q(0) f(r/r_w)$ – тепловыделение в единице объема, причем функция $f(r/r_w)$ инвариантна относительно масштабных преобразований (r_w – радиус трубки).

Введя функционал $\vartheta = \int\limits_0^T \lambda(T)\, dT$ и приняв $\lambda = T^s$, можно уравнение теплопроводности записать в виде:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = H(\vartheta) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + Q \right],$$

где

$$H(\vartheta) \equiv T = [(s+1)\vartheta]^{s/(s+1)}, \quad s \neq -1.$$

Требование инвариантности этого уравнения относительно масштабных преобразований

$$\begin{gathered} \widetilde{\vartheta} = k^{\alpha}\vartheta, \quad \widetilde{t} = k^{\beta} t, \quad \widetilde{r} = k^{\gamma} r, \\ \widetilde{z} = k^{\gamma} z, \quad \widetilde{v} = k^{\gamma-\beta} v, \quad \widetilde{Q} = k^{\delta} Q \end{gathered} \tag{2}$$

приводит к следующим соотношениям между показателями коэффициентов подобия:

$$\alpha = (2\gamma - \beta)(s + 1)/s, \quad \gamma = (\alpha + \delta)2,$$
$$\beta = 2\gamma - \alpha s/(s + 1), \quad \delta = \beta - \alpha + \alpha s/(s + 1). \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда линейные размеры разрядов и масштабы соответствующих им времен отличаются в k раз, т.е. $\widetilde{r} = kr$ и $\widetilde{t} = kt$ ($\beta = \gamma = 1$). Положив, например, $s = 1$ (т.е. приняв наиболее реальную в случае слабо ионизованной плазмы аппроксимацию зависимости λ от T), из выражений (2) и (3) получим:

$$\widetilde{Q} = Q, \quad \vartheta = k^2 \vartheta, \quad \widetilde{T} = kT,$$

т.е. в разрядах с одинаковым тепловыделением в единице объема температура газа возрастает во столько же раз, во сколько увеличиваются линейные размеры разрядных трубок.

В сильно (или полностью) ионизованной плазме $\lambda \sim T^{5/2}$ /13/. Поэтому из выражений (2) и (3) получим формально

$$\widetilde{Q} = k^{0,6} Q, \quad \widetilde{\vartheta} = k^{1,4} \vartheta, \quad \widetilde{T} = k^{0,4} T.$$

Эти формулы, однако, недостаточно надежны, т.к. в сильно ионизованной плазме градиент температуры искажает распределение электронов по энергиям, приводя к изменению потока электронов; подобным же образом электрическое поле вызывает изменение потока тепла /13/:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \alpha \nabla T, \quad \vec{q} = -\lambda \nabla T - \beta \vec{E}. \tag{4}$$

Здесь $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{q}$ – тепловой поток; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. Коэффициенты α, β, σ (проводимость), λ (теплопроводность) не являются независимыми /14/. Уравнение теплопроводности $\partial T/\partial t = \nabla \vec{q} + Q$ при учете (4) примет вид, отличный от (1). Поэтому для установления преобразований подобия в случае сильно ионизованной плазмы следует исследовать инвариантные свойства этого нового уравнения совместно с уравнением, обобщающим закон Ома (4).

Автор благодарен Э.Н. Лотковой, Л.В. Овсянникову, Н.Н. Соболеву и А.П. Чупахину за полезные советы.

Поступила в редакцию 12 марта 1985 г.
После переработки 8 апреля 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фон Энгель А. Ионизованные газы. М., Физматгиз, 1959.
2. Конюхов В.К. ЖТФ, **40**, 1649 (1970).
3. Лоткова Э.Н., Соковиков В.В. Квантовая электроника, **10**, 1026 (1982).
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983.
6. Бриджмэн П.В. Анализ размерностей. ГТТИ, М.–Л., 1934.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М., Наука, 1981.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Наука, 1981.
9. Bluman G.W., Cole J.D. Similarity Methods for Differential Equations, Appl. Math. Sci., **13**, Springer, 1974.
10. Munier A. et al. SIAM J. Appl. Math., **40**, 191 (1981).
11. Варшавский Г.А. ЖЭТФ, **6**, 283 (1936); ПМТФ, № 3, 3 (1961).
12. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, Наука, 1970.
13. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Мир, 1965.
14. Де Гролт С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Мир, 1964.