Краткие сообщения по физике № 6-1985 г.

НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Е.А. Заболотская

УДК 534.222

Выведено приближенное уравнение, описывающее нелинейное распространение квазиплоской поперечной волны в изотропном твердом теле. На его основе вычислена амплитуда второй гармоники линейно-поляризованной сдвиговой волны, генерируемой в гауссовом пучке.

Исследование процесса нелинейного распространения звуковых пучков в жидкостях и газах показывает, что искажение формы возмущения в пучках существенно отличается от искажения плоских волн /1 – 3/. Это ставит вопрос о необходимости учета дифракционной расходимости при изучении распространения волн конечной амплитуды в твердом теле.

Вследствие различия в скоростях распространения продольных и поперечных волн ($c_l > \sqrt{2}\, c_t$ /4/, где c_l и c_t соответственно скорости продольных и поперечных волн) условия синхронизма между этими волнами не выполнены. Если принимать во внимание только синхронные взаимодействия, приводящие к накапливающимся эффектам, то можно рассматривать отдельно распространение и искажение продольных и поперечных волн. Продольные квазиплоские волны конечной амплитуды в изотропном твердом теле проанализированы в /5/. В данной работе выводится приближенное уравнение, описывающее нелинейное распространение пространственно-ограниченных сдвиговых волн в изотропном твердом теле.

Распространение упругих волн в изотропном твердом теле описывается уравнением /4/:

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k + \partial \sigma'_{ik} / \partial x_k . \qquad (1)$$

Здесь ρ – плотность недеформированного твердого тела; u_i – вектор смещения; $\sigma_{ik} = \partial \mathcal{E} / \partial (\partial u_i / \partial x_k)$ – тензор упругих напряжений; $\sigma'_{ik} = 2\eta(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\dot{u}_{ll}) + \xi \delta_{ik} \dot{u}_{ll}$ – "диссипативный" тензор напряжений /4/; $\mathcal{E}$ – упругая энергия; $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ – тензор деформации; η и ξ – коэффициенты вязкости.

Во втором приближении поперечные плоские волны не искажаются, поэтому для исследования нелинейного распространения квазиплоских волн нужно рассмотреть третье приближение. Упругая энергия с точностью до членов u_{ik}^4 может быть представлена в виде:

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + (K/2 - \mu/3)\, u_{ll}^2 + (A/3)\, u_{ik} u_{kl} u_{li} + B u_{ll} u_{ik}^2 + (C/3)\, u_{ll}^3 +$$

$$+ D u_{ik} u_{kl} u_{lm} u_{mi} + E u_{ll} u_{ik} u_{km} u_{mi} + F u_{ll}^2 u_{ik}^2 + G (u_{ik} u_{ki})^2 + H (u_{ll})^4 .$$

Уравнение движения (1) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_t^2\, \Delta u_i - (c_l^2 - c_t^2)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, (\operatorname{div} \vec{u}) = \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik}^{(H)} - \sigma'_{ik}), \quad (2)$$

где $c_t^2 = \mu/\rho$; $c_l^2 = (K + 4\mu/3)/\rho$; $\sigma_{ik}^{(H)}$ – нелинейная часть тензора напряжений. Пусть поперечная волна распространяется вдоль оси z. Будем искать решение уравнения (2), близкое к плоским волнам в линейной среде: $u_{x,y} = \sqrt{\epsilon}\, u_{x,y}(\tau, x', y', z')$, $u_z = \epsilon u_z(\tau, x', y', z')$, где ϵ – малый безразмерный параметр; $\tau = t - z/c_t$ – сопровождающее время; $z' = \epsilon z$; $x' = \sqrt{\epsilon}\, x$; $y' = \sqrt{\epsilon}\, y$ – "медленные" координаты.

Расписывая уравнение (2) по компонентам и исключая u_z, получим уравнения третьего порядка малости по величине возмущения:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau \partial z} - \frac{c_t}{2}\, \Delta_\perp u_i - \frac{\mu + A/4}{2\rho c_t^3}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau} - 2\, \frac{\partial u_i}{\partial \tau}\ \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \tau}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau}\right)\right] - \quad (3)$$

$$- \frac{F}{2\rho c_t^5}\, \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau}\ \frac{\partial u_l}{\partial \tau}\right) - \frac{\eta}{2\rho c_t^3}\, \frac{\partial^3 u_i}{\partial \tau^3} = 0.$$

Здесь i, l принимают значения 1,2; по дважды встречающимся индексам производится суммирование. Штрихи у "медленных" координат опущены. Коэффициент F выражается через упругие константы:

$$F = 2\mu/3 + K/2 + A/2 + B + D/2 + G.$$

В уравнение (3) входит квадратичная форма, которая для линейно-поляризованных волн и волн с круговой и эллиптической поляризацией обращается в нуль. Поэтому вторая гармоника непосредственно на квадратичной нелинейности не возникает. Механизм, обеспечивающий генерацию второй гармоники поперечной волны в пучке, заключается в следующем: на кубической нелинейности появляется третья гармоника, затем она, смешиваясь на квадратичной нелинейности с основной компонентой, порождает вторую гармонику.

В качестве примера рассмотрим генерацию второй гармоники линейно-поляризованной сдвиговой волны с гауссовым распределением амплитуды. Допустим, что на границе нелинейной среды возбуждается квазиплоская гармоническая поперечная волна. Будем искать решение уравнения (3) в виде :

$$u = u_1 e^{i\omega\tau} + u_2 e^{2i\omega\tau} + u_3 e^{3i\omega\tau} + \text{k.c.}$$

Пусть волна с частотой ω линейно поляризована и имеет отличную от нуля x-компоненту $u_1 = u_{1x}$. Кроме того, при $z = 0$ амплитуда распределена по сечению пучка по закону Гаусса: $u_1 = u_0 \exp\left[-(x^2 + y^2)/a_0^2\right]$.

Решение линейного уравнения (3) без диссипации можно написать в виде:

$$u_1 = \frac{ika_0^2 u_0}{2z + ika_0^2} \exp\left[-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z + ika_0^2}\right],$$

где $k = \omega/c_t$ – волновое число.

Для вычисления амплитуды третьей гармоники нужно решать неоднородное линейное уравнение, получаемое из уравнения (3), с граничным условием $u_3 = 0$ при $z = 0$. Комплексная амплитуда третьей гармоники равна:

$$u_3 = \frac{iF\omega^4 ka_0^4 u_0^3 z}{2c_t^6 \rho(2z + ika_0^2)^2} \exp\left[-\frac{3ik(x^2 + y^2)}{2z + ika_0^2}\right].$$

Отметим, что третья гармоника линейно поляризована и имеет x-компоненту.

Амплитуда второй гармоники определяется уравнением:

$$2i\omega \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{c_t}{2} \Delta_\perp u_2 = \frac{\mu + A/4}{2\rho c_t^3} f_y, \tag{4}$$

где $f_y = \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} \dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial \tau \partial y} \dfrac{\partial u_x}{\partial \tau}$. Из уравнения (4) следует, что вторая гармоника линейно поляризована, но имеет y-компоненту.

Сила f_y на частоте 2ω выражается через u_1 и u_3:

$$f_y = \frac{16 iF\omega^6 k^3 a_0^6 u_0^4 zy(z - ika_0^2)}{c_t^6 \rho (2z + ika_0^2)(4z^2 + k^2 a_0^4)} \exp\left[- \frac{4ik(x^2 + y^2)(z - ika_0^2)}{4z^2 + k^2 a_0^4}\right].$$

Продифференцируем уравнение (4) по y и введем новую функцию $v = \partial u_2 / \partial y$. Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{i}{4k} \Delta_\perp v = \frac{(\mu + A/4) f_y}{32 \rho c_t^3 \omega k y (z - ika_0^2)}. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) может быть представлено в виде:

$$v = \int_0^z w(z, z')\, dz', \tag{6}$$

где

$$w(z, z') = \frac{\Lambda k^2 a_0^6 (z' + ika_0^2) z'}{(2z' + ika_0^2)\left[4z(z'^2 + k^2 a_0^4) - 3k^2 a_0^4 z' + ika_0^2 (4z'^2 + k^2 a_0^4)\right)} \times$$

$$\times \exp\left[- \frac{4ik(x^2 + y^2)(z'^2 + k^2 a_0^4)}{4z(z'^2 + k^2 a_0^4) - 3k^2 a_0^4 z' + ika_0^2 (4z' + k^2 a_0^4)}\right],$$

$$\Lambda = i(\mu + A/4) F\omega^5 u_0^4 / 2\rho^2 c_t^9.$$

Как следует из выражения (6), на расстояниях $z \ll ka_0^2$ амплитуда второй гармоники увеличивается с расстоянием по закону $u_2 \propto z^2$. Кроме того, амплитудное распределение второй гармоники не обладает аксиальной симметрией.

Таким образом, вторая гармоника поперечной волны, "запрещенная" в приближении плоских волн /6, 7/, может генерироваться в изотропном твердом теле на упругой нелинейности при учете дифракционной расходимости. Это дополняет известные механизмы генерации второй гармоники, связанные с существованием остаточных напряжений /8/ и пространственных микронеоднородностей модулей упругости /9/.

Поступила в редакцию 22 марта 1985 г.
После переработки 5 мая 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р о в В.А., К р а с и л ь н и к о в В.А. ДАН СССР, 118, № 5, 920(1958).
2. А н д р е е в В.Г., К а р а б у т о в А.А., Р у д е н к о О.В. Вестник МГУ, сер. 3, физика и астрономия, 25, № 3, 35 (1984).
3. Б а х в а л о в Н.С., Ж и л е й к и н Я.М., З а б о л о т с к а я Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М., Наука, 1982.
4. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1965.
5. З а б о л о т с к а я Е.А. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 36 1985.
6. Г о л ь д б е р г З.А. Акустический журнал, 6, № 2, 307 (1960).
7. З а р е м б о Л.К., К р а с и л ь н и к о в В.А. Введение в нелинейную акустику. М., Наука, 1966.
8. З а р е м б о Л.К., Т и м о ш е н к о В.И. Нелинейная акустика. Изд. МГУ, М., 1984.
9. Ч а р н а я Е.В., Ш у т и л о в В.А. Акустический журнал, 31, № 1, 114, (1985).