Краткие сообщения по физике № 6-1985 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ГАЗОВОЙ СМЕСИ; ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

П.Б. Лернер, И.М. Соколов

УДК 534.833.53

Предлагается гидродинамическая теория распространения звука в газовой смеси, дающая дисперсионную зависимость скорости звука от частоты.

Рассмотрим распространение звука в смеси газов с сильно отличающимися молекулярными массами. При небольшой концентрации тяжелой компоненты имеет место заметная зависимость скорости звука от частоты /1/. Для распространения звука в таких смесях могут быть записаны простые системы гидродинамических уравнений.

При движении одной тяжелой молекулы в газе легких на нее действует сила трения, пропорциональная скорости /2/:

$$\vec{f} = -n_1 (3m_1 k_B T)^{1/2} \sigma_t \vec{V}. \qquad (1)$$

Здесь n_1 и m_1 – соответственно концентрация и масса молекулы легкой компоненты; k_B – постоянная Больцмана; T – температура; σ_t – транспортное сечение, предполагаемое независящим от скорости. Время релаксации движения частицы

$$\tau = m_2 b^{-1}, \qquad (2)$$

где b – коэффициент при скорости в правой части (1); m_2 – масса тяжелой молекулы. Для атома ксенона в среде молекулярного водорода при нормальных условиях $\tau \sim 10^{-7}$ с. Поведение системы определяется соотношением между этим временем и временем $\tau_H = m_2^{1/2} n_2^{-1} \sigma_H^{-1} (3k_B T)^{-1/2}$ между соударениями двух тяжелых молекул. Здесь n_2 и σ_H – концентрация и сечение соударения тяжелых молекул.

Если $n_2 \ll n_1$, $\tau \ll \tau_H$, то можно пренебречь взаимодействием между тяжелыми молекулами и вкладами тяжелой компоненты в давление и теплоемкость системы. Представляет интерес также случай, когда $\tau_H \ll \tau$, $n_2 \ll n_1$, т.е.

$$(\sigma_t/\sigma_H)\sqrt{m_1/m_2} \ll n_2/n_1 \ll 1. \tag{3}$$

При этом каждую из компонент следует рассматривать как сплошную среду. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Из (1) следует, что средняя скорость молекул тяжелого газа, погруженных в движущийся легкий, подчиняется уравнению

$$\rho_2 \dot{\vec{V}}_2 = - B(\vec{V}_2 - \vec{V}_1), \tag{4}$$

где ρ_2 – плотность тяжелой компоненты; $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ – макроскопические скорости; $B = bn_2$. Стоящую в правой части (4) силу следует записать с противоположным знаком в правую часть уравнения Навье – Стокса для движения легкого газа:

$$\rho_1\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_1, \nabla)\right)\vec{V}_1 + \nabla p_1 = B(\vec{V}_2 - \vec{V}_1), \tag{5}$$

где ρ_1 – плотность; p_1 – давление легкого газа, вязкостью которого мы пренебрегли. Исключая $\vec{V}_2$ из (4) и (5), получим интегро-дифференциальное уравнение для $\vec{V}_1$:

$$\rho_1(\dot{\vec{V}}_1 + (\vec{V}_1, \nabla)\vec{V}_1) + \nabla p_1 = B[\tau^{-1}\int_{-\infty}^{t} \vec{V}_1(t')e^{-(t-t')/\tau}dt' - \vec{V}_1]. \tag{6}$$

Дополнив это уравнение уравнением непрерывности и уравнением адиабаты для легкого газа и линеаризуя полученную систему, приходим к следующей зависимости скорости плоской волны от частоты:

$$v_S = v_{S,1}\,[1 + \rho_2/\rho_1\,(1 + i\omega\tau)]^{-1/2}, \tag{7}$$

где $v_{S,1} = \sqrt{\gamma_1 p_1/\rho_1}$ – скорость звука в легком газе; γ_1 – показатель адиабаты для легкого газа. При $\omega\tau \ll 1$ скорость звука $v_{S,0} = v_{S,1}\sqrt{\rho_1/(\rho_1 + \rho_2)}$. При $\omega\tau \gg 1$ имеем $v_{S,\infty} = v_{S,1}$, т.е. звук распространяется лишь в легком газе; тяжелые молекулы остаются практически неподвижными. При $\omega\tau \sim 1$ затухание волн происходит на расстоянии порядка длины волны. Общий вид зависимости (7) скорости звука от частоты полностью соответствует выражению теории Мандельштама – Леонтовича, содержащей одно время релаксации /3/.

В случае, когда концентрация тяжелой компоненты не слишком мала, слабость взаимодействия подсистем позволяет записать уравнения гидродинамики для каждой из компонент по отдельности:

$$\begin{aligned} &\rho_1 (\dot{\vec{V}}_1 + (\vec{V}_1, \nabla)\vec{V}_1) + \nabla p_1 = \vec{f}_{12}, \\ &\rho_2 (\dot{\vec{V}}_2 + (\vec{V}_2, \nabla)\vec{V}_2) + \nabla p_2 = \vec{f}_{21}. \end{aligned} \tag{8}$$

Вид объемной силы $\vec{f}_{12} = B(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ такой же, как в предыдущем случае, коэффициент B, однако, может быть отличным от даваемого соотношением (1). Уравнения Навье – Стокса (8) должны быть дополнены парой уравнений непрерывности. Для получения уравнения состояния запишем первое начало термодинамики, считая скорость теплообмена пропорциональной разности температур подсистем:

$$\begin{aligned} &\nu_1 c_{V1} dT_1 + p_1 dV_1 + \lambda(T_2 - T_1)\, dt = 0, \\ &\nu_2 c_{V2} dT_2 + p_2 dV_2 + \lambda(T_1 - T_2)\, dt = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $c_{V1,2}$ – молярные теплоемкости; $V_{1,2}$ – объемы газов; $\nu_{1,2} = M_{1,2}/\mu_{1,2}$, где $M_{1,2}$ – массы, а $\mu_{1,2}$ – молекулярные веса компонент; величина λ определяет скорость теплообмена. Уравнение адиабаты, зависящее от частоты, получается из (9) и уравнений Менделеева – Клайперона для каждой из компонент.

Уравнения (8), (9) определяют время релаксации относительного движения $\tau_h = \widetilde{\rho}/B$ и время релаксации температур $\tau_t = \widetilde{c}/\lambda$ ($\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{c}$ – приведенные плотность и теплоемкость газов). Как и в задаче о движении частиц в плазме (/2/, § 43), $\tau_h \sim \tau \ll \tau_t$.

Полное дисперсионное уравнение весьма громоздко, поэтому ограничимся указанием лишь асимптотических значений скоростей звука. При $\omega \ll \tau_t^{-1}$, когда температуры и скорости подсистем равны в любой момент времени, для скорости звука получаем выражение /4/:

$$v_{s,0} = \sqrt{\bar{\gamma} RT/\bar{\mu}}, \tag{10}$$

где $\bar{\mu} = (M_1 + M_2)/(\nu_1 + \nu_2)$; $\bar{\gamma} = (\bar{c}_V + R)/\bar{c}_V$; $\bar{c}_V = (\nu_1 c_{V1} + \nu_2 c_{V2})/(\nu_1 + \nu_2)$.

При $\tau_t^{-1} \ll \omega \ll \tau_h^{-1}$ колебания температур подсистем независимы.

$$v_{s,int} = \sqrt{(\gamma_1 \nu_1 + \gamma_2 \nu_2) RT/(M_1 + M_2)}. \tag{11}$$

Переход между (10) и (11) осуществляется по закону Мандельштама – Леонтовича с характерным временем τ_t. При $\omega \gg \tau_h$ в системе распространяются две волны со скоростями $v_{s,1} = \sqrt{\gamma_1 RT/\mu_1}$, $v_{s,2} = \sqrt{\gamma_2 RT/\mu_2}$, соответствующие независимым колебаниям каждой из подсистем.

Для раствора Xe в H_2 сильное неравенство в (3) не выполнено, и распространение колебаний, соответствующих медленной ветви, может быть значительно подавлено.

При нормальных условиях колебания с частотой $\sim 10^7$ Гц затухают в легком газе на длинах, меньших 1 см, и их непосредственное наблюдение может оказаться затруднительным. Повышением давления смеси до 100 атм можно увеличить характерную частоту $\omega_c \sim \tau^{-1}$ до значений $\sim 10^9$ Гц, при которых закон дисперсии (7) приведет к аномальному уширению спектра рассеяния Мандельштама – Бриллюэна /1, 5/.

Авторы благодарны В.А. Алексееву за плодотворные дискуссии.

Поступила в редакцию 1 апреля 1985 г.

После переработки 11 мая 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.А., Федоров П.Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 4, 6 (1985).
2. Лифшиц Е.М., Питаевский В.П. Физическая кинетика. М., Наука, 1979.
3. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. ЖЭТФ, 7, 438 (1937).
4. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. М., Наука, 1964.
5. Старунов В.С., Фабелинский И.Л. УФН, 98, в. 3, 441 (1969).