Краткие сообщения по физике № 8-1985 г.

О ПРОХОЖДЕНИИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ЧЕРЕЗ УЗКОПОЛОСНУЮ СТОХАСТИЧЕСКУЮ ВОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

В.Н. Стрельцов

УДК 535.36

Исследовано пространственное распределение интенсивности лазерного пучка, прошедшего через статическую случайную водную поверхность с реальным узкополосным спектром.

В настоящей работе в кирхгофовском приближении в рамках скалярной модели изучается пространственное распределение интенсивности монохроматического лазерного пучка, прошедшего через статическую случайную водную поверхность с реальным узкополосным распределением. Получены общие выражения для угловой зависимости освещенности во фраунгоферовской зоне пучка и проведен их анализ при различных параметрах лазерного пучка и волнения поверхности.

Пусть на случайную цилиндрически-симметричную водную поверхность $z + \zeta(x) = 0$ падает вертикально (по оси z) монохроматическая световая волна Φ с гауссовским поперечным распределением:

$$\Phi(\vec{r},t) = E_0 e^{i(kz-kct)}\, e^{-r_\perp^2/a^2}.$$

Предполагая выполненными обычные условия плавности и крупномасштабности волнения $k/q \gg 1$; $k\rho \gg 1$, где $1/q$, ρ – соответственно характерные размер и радиус кривизны неоднородностей, для поля $\Phi(\vec{R},t)$ во фраунгоферовой зоне можно записать интеграл Кирхгофа:

$$\Phi(\vec{R},t) = (iE_0/4\pi R)\, e^{ik(ct+nR)} \int T e^{i(\vec{k}-kn\vec{s})\vec{r}} [\vec{n}(\vec{r})\vec{\kappa}(\vec{r}) + kn\vec{s}\vec{n}(\vec{r})] e^{-r_\perp^2/a^2}\, dS. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{\kappa}$ – волновой вектор волны на нижней стороне поверхности, рассчитываемый на каждой элементарной площадке поверхности в приближении геометрической оптики (из условия непрерывности Ф на границе); $\vec{s} = \vec{R}/R$; $\vec{n}(\vec{r})$ – вектор внешней нормали к поверхности в данной точке (начало координат лежит на поверхности); T – коэффициент пропускания по полю; n – показатель преломления воды. Далее будем предполагать, что затенение отсутствует, т. е. характерные уклоны невелики: $|\zeta'_x| \ll 1$. Тогда предэкспоненциальный множитель под интегралом в (1) можно положить равным

$$kn(1+s_z)/\sqrt{1+\zeta_x'^2}.$$

Домножая (1) на комплексно сопряженную величину и переходя от интегрирования по поверхности S к интегрированию по плоскости xy, для интенсивности $I(\vec{R})$ при T = const получим:

$$I(\vec{R}) = k^2 n^2 T^2 E_0^2 \frac{1+\cos\theta}{32\pi^2 R^2} \int \exp\left\{ik(n\cos\theta - 1)[\zeta(x) - \zeta(x')] - \right.$$

$$\left. - ikn\sin\theta\cos\alpha(x-x') - ikn\sin\theta\sin\alpha(y-y') - (x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2)\right\}/a^2 \times \qquad (2)$$

$$\times\, d\vec{x}\, d\vec{y},$$

где $\vec{s}$ записано через углы θ, α сферической системы координат.

Выражение (2) должно быть усреднено по ансамблю реализаций $\zeta(x)$. Волнение будем считать "узкополосным", подразумевая под этим выполнение неравенства /1,2/: $\mu_2/\mu_0\langle q\rangle^2 \ll 1$, где

$$\mu_r = \int_0^\infty (q - \langle q\rangle)^r E(q)\, dq;$$

E(q) – пространственная спектральная плотность энергии волнения; $\langle q\rangle$ определяется из условия $\mu_1 = 0$. Тогда для $\zeta(x)$ из центральной предельной теоремы можно получить следующее представление:

$$\zeta(x) = \mathrm{Re}\{\rho(x)\exp[i\psi(x) + i\langle q\rangle x]\},$$

где ρ и ψ – медленно меняющиеся амплитуда и фаза плоской волны с "несущим" волновым вектором $\langle q\rangle$; ψ и ρ – статистически независимые случайные функции, причем ψ распределено равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, а ρ

имеет релеевское распределение: $p(\rho) = (\rho/\mu_0)\exp(-\rho^2/2\mu_0)$. Характерный масштаб изменения ψ составляет величину порядка $(\mu_2/\mu_0)^{1/2}$. Такая статистическая модель согласуется с опытными данными по временной структуре волнения для определенных ветровых условий /3/.

Далее во избежание громоздкости будем считать выполненным условие $\sqrt{\mu_2/\mu_0}\, a \ll 1$; при этом

$$\zeta(x) - \zeta(x') \approx 2\rho \sin\left(\psi + \langle q\rangle \frac{x + x'}{2}\right) \sin\left(\langle q\rangle \frac{x - x'}{2}\right).$$

Подставляя написанное равенство в (2), разлагая экспоненту, содержащую ζ, в ряд по функциям Бесселя и проводя затем ее усреднение по фазе ψ, для среднего значения получаем:

$$\langle \exp\{ik(n\cos\theta - 1)[\zeta(x) - \zeta(x')]\}\rangle = \int_0^\infty J_0\left[k(n\cos\theta - 1)\, 2\rho \sin\left(\langle q\rangle \frac{x - x'}{2}\right)\right] \times$$
$$\times\, p(\rho)\, d\rho. \tag{3}$$

Выполняя оставшееся интегрирование в (3) и подставляя в (2), для средней интенсивности $\langle I(\vec{R})\rangle$ окончательно находим:

$$\langle I(\vec{R})\rangle = \Lambda(1 + \cos\theta)^2 \exp[a^2 k^2 n^2 \sin^2\theta \sin^2 a/2] \times$$
$$\times \int \exp(-ikn\sin\theta\cos a v - v^2/2a^2)\exp[-2\mu_0 k^2 (n\cos\theta - 1)^2 \sin^2(\langle q\rangle v/2)]dv; \tag{4}$$
$$\Lambda = a^3 k^2 n^2 T^2 E_0^2/8\sqrt{2\pi}R^2; \quad v = x - x'.$$

Вторая экспонента в подынтегральной функции в (4) имеет большой осциллирующий показатель, причем характерный радиус ее убывания $\Delta v \sim (2/\mu_0 k^2 (n\cos\theta - 1)^2 \langle q\rangle^2)^{1/2}$. Считая выполненым неравенство $\mu_0 k^2 \times (n\cos\theta - 1)^2 \langle q\rangle^2 a^2 \gg 1$, разложим показатель экспоненты в ряд около точек $\langle q\rangle v = 2\pi l$. Удерживая первый член разложения и устремляя пределы интегрирования по v к бесконечности, для $\langle I(\vec{R})\rangle$ получим:

$$\langle I(\vec{R})\rangle = \Lambda(1 + \cos\theta)^2 [\pi/2k^2 \mu_0 (n\cos\theta - 1)^2 \langle q\rangle^2]^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{k^2 n^2 a^2 \sin^2\theta \sin^2 a}{2} - \frac{n^2 \sin^2\theta \cos^2 a}{8\mu_0 \langle q\rangle^2 (n\cos\theta - 1)^2}\right] \times \tag{5}$$
$$\times \sum_l 2\cos[(2\pi l/\langle q\rangle) kn \sin\theta \cos a]\exp[-2\pi^2 l^2/\langle q\rangle^2 a^2].$$

Заметим, что для углов θ и α, таких что $\sin\theta\cos\alpha \lesssim \sqrt{8\mu_0}\langle q\rangle(n-1)/n$, дающих основной вклад в интенсивность, используемое приближение эквивалентно методу Лапласа. Поэтому для них выражение (5) является асимптотически точным. При обратном соотношении подынтегральная функция сильно осциллирует на интервале интегрирования Δv и равенство (5) становится нестрогим. Для таких углов, однако, интенсивность будет (как и в (5)) экспоненциально мала.

Из (5) следует, что волнение рассматриваемого вида приводит к ослаблению интенсивности поля в дифракционном максимуме $\Delta\tilde{\theta} \lesssim \sqrt{2}/kna$, который имел бы место при отсутствии волнения, и одновременному возрастанию дифракционного угла $\Delta\theta$ прошедшего пучка: $\Delta\theta \approx 2\sqrt{2\mu_0}\langle q\rangle(n-1)/n \gg \Delta\tilde{\theta}$. Полная мощность пучка в плоскости $z = H$ в соответствии с законом сохранения энергии остается равной мощности падающего пучка, умноженной на коэффициент пропускания T^2.

В заключение отметим, что в практически интересном случае двухкратного прохождения светового пучка через стохастическую поверхность, например, при регистрации эхо-сигнала от рассеянного в объеме (на фраунгоферовской глубине H) лазерного пучка, для рассматриваемого типа статистики волнения в результате аналогичного (4) изменения дифракционных параметров пучков, определяемых теперь парными корреляциями возмущения поверхности в четырех ее точках x, x', x'', x''', средняя мощность $\langle P\rangle$ сигнала на приемнике будет ослаблена по сравнению с сигналом $P(\mu_0 = 0)$ при ровной поверхности. Действительно, как можно показать, повторяя предыдущие выкладки, при $\langle q\rangle a \ll 1$

$$\frac{\langle P\rangle}{P(\mu_0 = 0)} = \kappa \, \frac{\int \langle I\rangle \delta(R_z - H)\, d\vec{R}}{\int I(\mu_0 = 0)\,\delta(R_z - H)\, d\vec{R}}, \tag{6}$$

$$\kappa = \frac{4}{\pi a^2} \int \exp\left[-8k^2\mu_0(n-1)^2 \sin^2\langle q\rangle v_1 \sin^2\langle q\rangle v_2 - 4\,\frac{v_1^2 + v_2^2}{a^2}\right] dv_{1,2},$$

$4v_1 = x - x' - x'' + x'''$, $4v_2 = x + x' - x'' - x'''$. Учитывая полученные выше результаты, отношение интегралов в (6) равно единице, и, следовательно, коэффициент преобразования мощности сигнала $\kappa < 1$.

Поступила в редакцию 5 мая 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rice S. O. Bell. Syst. Tech. J., 24, 46 (1945).
2. Longuet-Higgins M. S. Phyl. Trans. Roy. Soc. London, A249, 321 (1957).
3. Bretschneider C. L. Tech. Memo., 118 Beach Erosion Board, Washington, D. C., 1959.