УДК 537.312.62

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ

А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин

Для нелинейных периодических колебаний разности фаз в джозефсоновском переходе в тонкой пленке определена интенсивность спектральных линий излучения, а для 2π-кинка найдено распределение сплошного спектра излучения.

Одной из основных причин затухания разности фаз волновых функций в джозефсоновских переходах являются омические потери энергии в несверхпроводящем слое (см., например, [1 – 3]). Учет только омических потерь энергии лежит в основе широко используемой резистивной модели джозефсоновских переходов и определяет вид резистивных нелинейных диссипативных структур [4 – 6]. Другой часто пренебрегаемой причиной затухания разности фаз в туннельных переходах конечных размеров являются потери энергии на излучение. В частности, как было показано в работах [7, 8], затухание обобщенных волн Свихарта в сэндвичах с электродами, толщина которых меньше лондоновской длины, может определяться эффектом высвечивания волн в вакуум.

В настоящем сообщении изучается излучение из джозефсоновского перехода в тонкой пленке, толщина которой D меньше лондоновской длины λ. Основу рассмотрения составляет однородное уравнение для разности фаз, учитывающее потери энергии на излучение. В пренебрежении диссипацией разность фаз подчиняется уравнению математического маятника. Нелинейное состояние, отвечающее конечным колебаниям маятника, приводит к излучению нечетных гармоник основной частоты, а нелинейное состояние, отвечающее вращению маятника, порождает излучение четных гармоник. В случае 2π-кинка испускается непрерывнвй спектр частот, в основном не превышающих джозефсоновскую частоту. Определено спектральное распределение интенсивности излучения нелинейных состояний джозефсоновского перехода в пленке. Численные оценки потерь энергии демонстрируют возможность наблюдения спектров излучения, полученных в теории.

Для описания потреь энергии на излучение из джозефсоновского перехода в пленке воспользуемся уравнением для разности фаз φ волновых функций по разные стороны перехода

$$\omega_j^2 \sin\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\beta\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{2\lambda}{\pi D}\frac{v_s^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt'}{t'-t}\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(t'). \qquad (1)$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$, $\beta = 4\pi\sigma/\epsilon$, σ и ϵ – проводимость и диэлектрическая проницаемость туннельного слоя шириной $2d$, $\omega_j = (16\pi e d j_c/\hbar\epsilon)^{1/2}$ – джозефсоновская частота, $-e$ – заряд электрона, $\hbar$ – постоянная Планка, j_c – критическая плотность тока, λ – лондоновская длина, D – толщина пленки, $v_s/c = (d/\epsilon\lambda)^{1/2}$ – отношение скорости Свихарта v_s к скорости света c. Содержащее β первое слагаемое в правой части уравнения (1) описывает омические потери энергии в туннельном переходе. Далее будем обсуждать такие условия, когда влияние этих потерь на решения уравнения математического маятника несущественно. Потери энергии на излучение описываются вторым, интегральным слагаемым в правой части уравнения (1). Интеграл по времени в уравнении (1) понимается в смысле главного значения. Нелокальная во времени связь потерь энергии на излучение с разностью фаз возникает при последовательном решении уравнений Максвелла в вакууме и пленке. Решение в вакууме имеет вид электромагнитных волн, уходящих от пленки, что отвечает учету потерь энергии на излучение. Уравнение (1) записано в предположении, что отношение эффективной глубины проникновения поля в пленку $\lambda^2/D \gg \lambda$ к характерному времени изменения фазы $T = |\partial \ln\varphi/\partial t|^{-1}$ много меньше скорости света

$$\lambda^2/D \ll cT. \qquad (2)$$

Кроме того, в (1) опущены пространственные производные, что оправдано, если масштаб неоднородности фазы вдоль перехода $L = |\partial \ln\varphi/\partial z|^{-1}$ много больше расстояния, проходимого полем в вакууме за время T

$$L \gg cT. \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) совместны в случае протяженных переходов, когда выполнено условие $L \gg \lambda^2/D$.

Считая, что потери энергии на излучение невелики, будем учитывать интегральное слагаемое в (1) по теории возмущений. Для определения потерь энергии на излучение воспользуемся отнесенным к единице длины гамильтонианом джозефсоновского перехода в виде [3]

$$H = \frac{\hbar}{2e} j_c \left[\frac{1}{2\omega_j^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 1 - \cos\varphi \right]. \tag{4}$$

Принимая во внимание уравнение (1) и отвлекаясь от обсуждения омических потерь, из (4) находим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{D} \left(\frac{\hbar}{4\pi e} \right)^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{\partial}{\partial t'} \varphi_0(t'), \tag{5}$$

где φ_0 описывает решения уравнения математического маятника, возникающего из (1) при полном пренебрежении диссипацией.

Обсудим сначала решение уравнения математического маятника, отвечающее не вращательным колебаниям конечной амплитуды. В этом случае функция φ_0 имеет вид

$$\varphi_v = \varphi_0 = 2\mathrm{arcsin}[k\mathrm{sn}(\omega_j t, k)], \tag{6}$$

где k – модуль, а sn – эллиптический синус. Величина модуля k характеризует степень нелинейности колебаний. Производная функции φ_v представима в виде ряда Фурье

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_v = 8\Omega_v(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 + q^{2n+1}} \cos[(2n+1)\Omega_v(k)t]. \tag{7}$$

Здесь параметр q и частота Ω_v зависят от модуля k и равны

$$q = \exp[-\pi K'/K], \tag{8}$$

$$\Omega_v = \Omega_v(k) = \frac{\pi}{2K}\omega_j, \tag{9}$$

$K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$. При $k = 0$ частота Ω_v совпадает с джозефсоновской $\Omega_v = \omega_j$. По мере увеличения k функция Ω_v убывает и при k, близких к единице, логарифмически стремится к нулю

$$\Omega_v(k) = \frac{\pi}{2}\omega_j \left[\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \right]^{-1}. \tag{10}$$

Используя разложение (7) и усредняя по периоду $2\pi/\Omega_v$ выражение для производной гамильтониана по времени (5), находим

$$\frac{\Omega_v}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\Omega_v} dt\frac{dH}{dt} = \overline{\frac{dH}{dt}} = -\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(k), \tag{11}$$

где функция I_{2n+1} характеризует потери энергии с единицы длины джозефсоновского перехода, обусловленные излучением волн в вакуум на частоте $(2n+1)\Omega_v$,

$$I_{2n+1}(k) = \frac{2}{\pi}\frac{\hbar^2}{De^2}\Omega_v^3(k)(2n+1)q^{2n+1}(1+q^{2n+1})^{-2}. \tag{12}$$

Согласно соотношениям (11), (12) в случае решения φ_v (6) джозефсоновский переход излучает на нечетных частотах $(2n+1)\Omega_v$, $n = 0, 1, \ldots$. Основная частота Ω_v меньше джозефсоновской ω_j. При k, близких к нулю, когда $k \ll 1$, потери энергии на излучение малы и в основном сосредоточены вблизи основной частоты $\Omega_v \simeq \omega_j$. По мере увеличения k спектр излучения обогащается нечетными гармониками частоты Ω_v, а интервал между гармониками уменьшается. При k, близких к единице, излучается широкий спектр нечетных частот, близко отстоящих друг от друга. Отметим, что в соответствии с условиями применимости (2), (3) уравнения (1) соотношение (12) имеет смысл для гармоник, частоты которых лежат в интервале

$$2\pi c/L \ll (2n+1)\Omega_v \ll 2\pi cD/\lambda^2. \tag{13}$$

Иной вид имеют потери энергии на излучение в случае $k = 1$, когда решением уравнения (4) является 2π-кинк

$$\varphi_0 = 4\mathrm{arctg}(e^{\omega_j t}) - \pi. \tag{14}$$

В этом случае излучается непрерывный спектр частот, а потери энергии на излучение описываются выражением

$$\frac{dH}{dt} = -\int\limits_0^{\infty}\frac{d\omega}{\pi}I_\omega\cos\omega t, \tag{15}$$

где I_ω – спектральная плотность потерь энергии с единицы длины туннельного перехода,

$$I_\omega = \frac{1}{D}\left(\frac{\hbar\omega_j}{\pi e}\right)^2 I\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_j}\right), \tag{16}$$

а функция $I(a)$ имеет вид

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx|x|\mathrm{sech}(x)\mathrm{sech}(x-a). \tag{17}$$

Для функции $I(a)$ имеют место асимптотики: $I(a) \simeq \ln 2$ при $a \ll 1$; $I(a) \simeq 2G\mathrm{sech}(a)$ при $a \gg 1$, где $G \simeq 0,916$ – потсоянная Каталана. Согласно соотношениям (16), (17) излучение в основном происходит на частотах, меньших или порядка джозефсоновской: $\omega \lesssim 2\omega_j/\pi$. На больших частотах спектральная плотность экспоненциально мала. Как и в случае дискретного спектра излучения соотношения (16), (17) имеют смысл, если частота ω лежит в интервале, задаваемом неравенствами (13).

Теперь обратимся к рассмотрению нелинейного состояния джозефсоновского перехода, описываемого решением, отвечающим вращающемуся маятнику. При этом функция φ_0 имеет вид

$$\varphi_r = \varphi_0 = 2\mathrm{am}\left(\frac{\omega_j}{k}t, k\right), \tag{18}$$

где $\mathrm{am}(u,k)$ – амплитуда Якоби. Для дальнейших вычислений воспользуемся представлением функции $\mathrm{am}(u,k)$ в виде ряда

$$\varphi_r = 2\Omega_r(k)t + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n(1+q^{2n})}\sin[2n\Omega_r(k)t], \tag{19}$$

где, в отличие от соотношений (7), (9), частота Ω_r имеет вид

$$\Omega_r(k) = \frac{\pi}{2kK}\omega_j. \tag{20}$$

При k, близких к единице, частота Ω_r сравнительно мала (см. (10)). Напротив, при $k \ll 1$ она весьма велика

$$\Omega_r(k) \simeq \omega_j/k \gg \omega_j. \tag{21}$$

Принимая во внимание разложение (19) и следуя определениям (5), (11), найдем потери энергии на излучение с единицы длины джозефсоновского перехода

$$\overline{\frac{dH}{dt}} = -\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(k), \tag{22}$$

где функция I_{2n} определяет потери энергии на четных частотах $2n\Omega_r$

$$I_{2n}(k) = \frac{4}{\pi}\frac{\hbar^2}{De^2}\Omega_r^3(k)\frac{nq^{2n}}{(1+q^{2n})^2}. \tag{23}$$

Согласно соотношениям (20) – (23), при k, близких к единице, частота Ω_r много меньше джозефсоновской, а спектр излучения содержит много четных гармоник основной частоты. С уменьшением k частота Ω_r возрастает и становится больше ω_j. При этом, однако, интенсивность излучения на высших гармониках сильно подавлена, так как $q \ll 1$. В соответствии с условиями применимости теории частоты $2n\Omega_r$ должны удовлетворять неравенствам (13).

Дадим оценку плотности потока излучения с единицы длины туннельного перехода. Плотности потоков, отвечающие излучению нечетных (12) и четных (23) гармоник, сравнимы по величине. Ниже, для определенности, воспользуемся выражением (23). Примем, что толщина пленки составляет $D \simeq 3 \cdot 10^{-7}\,см = 30\,\text{Å}$, а джозефсоновская частота равна $\omega_j \simeq 10^{13}\,c^{-1}$. Тогда при $k^2 = 0,98$ из (23) находим: $I_2 \simeq 10\,вт/см^2$, $I_4 = 0,53\,вт/см^2$. При этом частота второй гармоники составляет $\simeq 0,95\omega_j$, а четвертой $\simeq 1,9\omega_j$. Обе частоты попадают в область применимости теории (13), если принять, что лондоновская длина составляет $\lambda \simeq 0,3\,мкм$, а длина джозефсоновского перехода порядка $L \simeq 300\,мкм$. Действительно, при таких λ и L нижняя и верхняя границы диапазона частот (13) равны соответственно $\simeq 2,1 \cdot 10^{12}\,c^{-1}$ и $\simeq 6,3 \cdot 10^{13}\,c^{-1}$. Из приведенных оценок видно, что наблюдение излучения джозефсоновского перехода в пленке не должно вызывать проблем, поскольку плотность потока излучения весьма велика.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ N 96–02–17303 и при поддержке Научного совета по ВТСП (проект "АД" N 95008).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Абрикосов А. А. Основы теории металлов, М., Наука, 1987, с. 451.

[2] Лихарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов, М., Наука, 1985.

[3] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона: физика и применения. М., Мир, 1984.

[4] Likharev K. K. Rev. Mod. Phys., **51**, 101 (1979).

[5] Kivshar Yu. S. and Malomed B. A. Rev. Mod. Phys., **61**, 763 (1989).

[6] Силин В. П. ЖЭТФ, **112**, 1396 (1997).

[7] Ngai K. L. Phys. Rev., **182**, 555 (1969).

[8] Овчинников К. Н., Силин В. П., Урюпин С. А. ФММ, **83**, 14 (1997).

Поступила в редакцию 30 декабря 1997 г.