

## ОБ УТОЧНЕНИИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ Ю. А. КРАВЦОВА И Ю. И. ОРЛОВА ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК СЕДЛОВОГО ТИПА

А. А. Асатрян

УДК 535.31

*Уточнены эвристические критерии применимости метода геометрической оптики, которые в первоначальной форме давали бесконечные размеры френелевского радиуса. Уточненные критерии используют сложение членов тейлоровского ряда по модулю и обеспечивают конечность френелевского радиуса.*

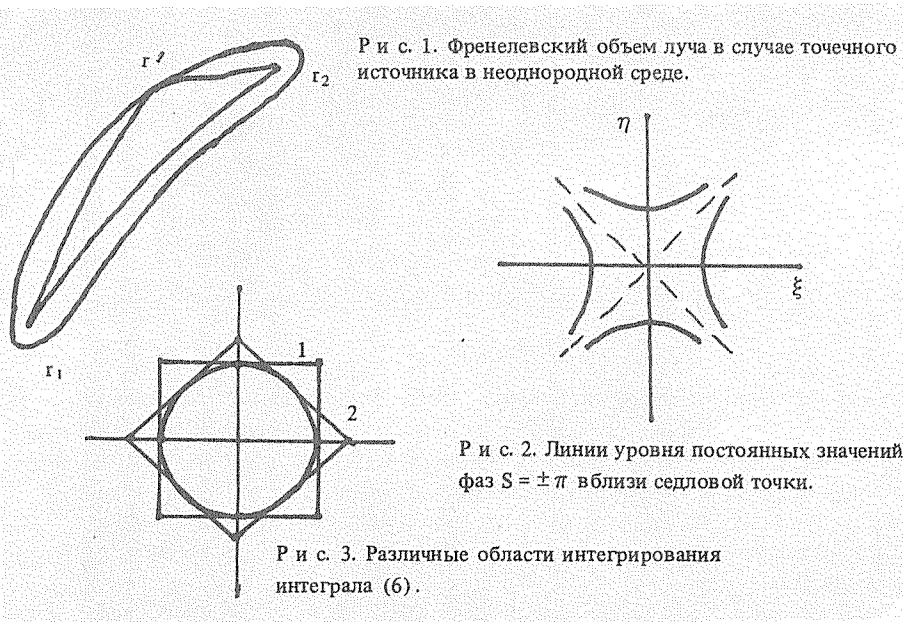
Эвристические критерии применимости метода геометрической оптики сформулированы в работах [1-5] и основаны на представлениях Гюйгенса и Френеля об интерференции вторичных волн. В соответствии с этими представлениями френелевский объем луча определен в [1-5] как объединение первых зон Френеля, нанизанных на опорный луч, при этом поверхность, ограничивающая френелевский объем в случае точечного излучателя, задана уравнением:

$$|S(\vec{r}_1, \vec{r}', \vec{r}_2) - S_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| = \pi. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — соответственно координаты точек излучения и наблюдения;  $S_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  — эйконал вдоль прямого луча;  $S(\vec{r}_1, \vec{r}', \vec{r}_2)$  — эйконал вдоль виртуальных лучей, имеющих только одну точку излома (рис. 1). Френелевский объем луча характеризует область пространства, которая формирует волновое поле в заданной точке  $\vec{r}_2$ . Эвристические критерии Ю.А. Кравцова и Ю.И. Орлова применимости геометрической оптики сводятся к требованию, чтобы в поперечном сечении френелевского объема параметры среды и волны практически не изменялись. Это условие формулируется в виде равенств типа:

$$a_f |\nabla F| / F \ll 1, \quad (2)$$

где  $a_f$  — сечение френелевского объема (1) в направлении  $\nabla F$ ;  $F(\vec{r})$  — некоторый параметр неоднородной среды или волны. В ряде случаев неравенства вида (2) допускают строгое обоснование, например, если волновое поле представлено двумерным интегралом Кирхгофа [4,5].



В работе [6] отмечено, что в окрестности седловой стационарной точки френелевский радиус  $a_f$ , формально определенный из (1), становится бесконечным, что ставит под сомнение критерий (2). Между тем, анализ дифракционных интегралов показывает, что поперечник  $a_f$  области формирования поля вблизи седловой точки в действительности конечен. Результаты этого анализа, оправдывающие неравенство (2), но уточняющие алгоритм нахождения  $a_f$ , приводятся ниже.

Пусть начальное поле задано в плоскости  $z = 0$ . Приближение геометрической оптики отвечает применению метода стационарной фазы к вычислению дифракционных интегралов вида

$$U = \iint A(x',y') \exp[iS(x',y')] dx' dy'. \quad (3)$$

При этом  $\pi$ -окрестность стационарной точки  $x'_0, y'_0$ , в которой  $\partial S/\partial x' = 0$  и  $\partial S/\partial y' = 0$ , выступает как сечение френелевского объема плоскостью

$z = 0$ . Разлагая фазу  $S(x', y')$  в степенной ряд в окрестности стационарной точки, ограничиваясь членами второго порядка и полагая для простоты  $S(x'_0, y'_0) = 0$ , запишем (3) в системе координат, в которой  $S_{xy} = 0$  (этого можно добиться поворотом исходной системы координат):

$$U = \iint A(x, y) \exp i(S_{xx}x^2/2 + S_{yy}y^2/2) dx dy.$$

Если точка стационарной фазы служит точкой максимума или минимума функции  $S(x, y)$ , т. е. если  $S_{xx}S_{yy} > 0$ , то границы френелевских зон в плоскости  $z = 0$  представляют собой эллипсы. Исходя из равенства (1), которое в данном случае принимает вид  $|S(x, y)| = \pi$ , получаем величины полуосей эллипса

$$a_f^{(x)} = \sqrt{2\pi/S_{xx}}, \quad a_f^{(y)} = \sqrt{2\pi/S_{yy}}. \quad (4)$$

При выполнении неравенств  $a_f^{(x)} |\partial A / \partial x| \ll A$ ,  $a_f^{(y)} |\partial A / \partial y| \ll A$  амплитуду  $A$  можно вынести из-под знака интеграла со значением в стационарной точке, а оставшийся интеграл

$$U = A_{st} \iint \exp [(i/2) (S_{xx}x^2 + S_{yy}y^2)] dx dy \quad (5)$$

приводит к приближению геометрической оптики.

Иначе обстоит дело в случае седловой точки стационарной фазы, для которой  $S_{xx}S_{yy} < 0$ . Подходящим выбором переменных в окрестности седловой точки интегральное выражение (5) можно представить в виде (для простоты множитель перед интегралом полагаем равным единице)

$$U = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\xi^2 - \eta^2)] d\xi d\eta. \quad (6)$$

Если формально определить границы френелевской области равенством  $|\xi^2 - \eta^2| = \pi$ , то на плоскости  $(\xi, \eta)$  получаем крестообразную область, простирающуюся до бесконечности вдоль биссектрис  $\xi = \eta$ ,  $\xi = -\eta$  (рис. 2).

В то же время фактическая область формирования интеграла (6) оказывается конечной. Чтобы убедиться в этом, приведем несколько оценок области формирования интеграла (6).

1) Проинтегрировав (6) по квадрату  $|\xi| \leq p$ ,  $|\eta| < p$  (квадрат 1 на рис. 3), получаем:

$$U_1(p) = \int_{-p}^p \exp(i\xi^2) d\xi \int_{-p}^p \exp(-i\eta^2) d\eta = 4|F(p)|^2,$$

где  $F(p) = \int_0^p \exp(it^2) dt$  — интеграл Френеля. Анализ зависимости  $U_1(p)$  показывает, что при  $p = \pi$  относительная ошибка  $U_1(p)$  по сравнению с  $U = U_1(\infty)$  составляет примерно 3%.

2) Путем замены переменных  $\xi_1 = (\xi + \eta)/\sqrt{2}$ ,  $\eta_1 = (-\xi + \eta)/\sqrt{2}$  интеграл (6) можно представить в виде:

$$U = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\xi_1\eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \quad (7)$$

Проинтегрировав (7) по квадрату со стороной  $2p$  и с вершинами на осях  $\xi, \eta$  (квадрат 2 на рис. 3), получим

$$U_2(p) = 2 \int_0^{2p^2} (\sin t/t) dt = 2\text{Si}(2p^2).$$

При  $p = \pi$  величина  $U_2(\pi)$  отличается от  $U_2(\infty) = 2\text{Si}(\infty)$  всего лишь на 2,2%.

3) Перейдя к полярным координатам  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \text{arctg}(y/x)$  и ограничиваясь интегрированием по кругу радиуса  $p$  (рис. 3), интеграл (6) можно привести к виду:

$$U_3(p) = 2\pi \int_0^p J_0(r) dr$$

и выразить через функции Бесселя и Струве. При  $p = \pi$  величина  $U_3(p)$  отличается от  $U = U_3(\infty)$  не более чем на 8%.

Таким образом, интегрирование (6) по трем различным по форме областям указывает на то, что область формирования интеграла (6) на 90-95% определяется  $\pi$ -окрестностью стационарной точки, которая в исходных переменных ограничена эллипсом с полуосями (4). Исходя из этого, условную границу френелевской зоны, которая была бы конечна и в случае стационарной точки седлового типа, целесообразно определить следующим образом.

Пусть точка  $x'_0, y'_0$  — стационарная точка для фазы  $S(x', y')$ . Представим разность  $S(x', y') - S(x'_0, y'_0)$  в нормальной (морсовской) форме, т. е. в форме, не содержащей перекрестного члена  $S_{xy} = 0$ ,

$$S(x, y) - S(x_0, y_0) = S_{xx}x^2/2 + S_{yy}y^2/2 + \dots \quad (8)$$

и потребуем, чтобы вместо (1) выполнялось равенство:

$$|S_{xx}|x^2/2 + |S_{yy}|y^2/2 = \pi. \quad (9)$$

Определяемые отсюда конечные величины  $a_f^{(x)} = \sqrt{2\pi/|S_{xx}|}$ ,  $a_f^{(y)} = \sqrt{2\pi/|S_{yy}|}$  следует рассматривать как размеры френелевской области по осям  $x$  и  $y$ ; при этом условия применимости метода геометрической оптики определяются неравенствами (2).

В случае, если вторые производные  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$  в нормальных формах обращаются в нуль, в разложение (8) необходимо включить более высокие члены разложения и свести их к типичным нормальным формам теории катастроф. Равенство типа (9) определяет тогда границы каустических зон.

Институт общей физики АН СССР      Поступила в редакцию 26 июня 1985 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. В сб. Современные проблемы распространения и рассеяния волн. М., ИРЭ АН СССР, 1979, с. 76.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. УФН, 132, 475 (1980).
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. ЖЭТФ, 81, 1603 (1981).
5. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. Rad. Sci., 16, 975 (1981).
6. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. XIV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тезисы докладов, Ленинград, 1984, ч. 2, с. 225.