Краткие сообщения по физике № 12-1985 г.

УДК 520.27+520.84

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВЯЗИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ В РЕШЕНИИ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ

И. Ф. Малов, В. А. Фролов

Записаны нелинейные интегральные уравнения, позволяющие по известному модулю (фазе) определить вещественную (мнимую) часть комплексной функции когерентности. Решение этих уравнений – один из путей корректного решения фазовой проблемы. Показано, что эти уравнения можно свести к системе алгебраических уравнений третьей степени.

В последнее время для решения обратных задач в различных разделах физики и техники /1,2/ используются преобразования Гильберта (ПГ), связывающие вещественную и мнимую части, с одной стороны, и модуль и аргумент фурье-образа $G(u)$ исследуемой функции $E(x)$, с другой. В одномерном случае можно записать:

$$G(u) \overset{\widetilde{F}}{\rightleftarrows} E(x),$$

$$G(u) = \Gamma(u)e^{i\varphi(u)} = \mathrm{Re}\,G(u) + i\,\mathrm{Im}\,G(u),$$

$$\varphi(u) \overset{\widetilde{H}}{\rightleftarrows} \ln\Gamma(u), \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\,G(u) \overset{\widetilde{H}}{\rightleftarrows} \mathrm{Im}\,G(u). \qquad (2)$$

Здесь $\widetilde{F}$ – оператор Фурье; $\widetilde{H}$ – оператор Гильберта.

Как правило, измерения дают только значения модуля $\Gamma(u)$, а фаза $\varphi(u)$ остается неизвестной. В этом состоит существо фазовой проблемы. Существует возможность восстановить искомую функцию $E(x)$, используя следующую цепочку операций /3,4/:

$$\ln\Gamma(u) \overset{\widetilde{H}}{\rightarrow} \varphi(u) \rightarrow G(u) \overset{\widetilde{F}}{\rightarrow} E(x).$$

Операция логарифмирования приводит к появлению дополнительного слагаемого (фазы Блашке) в выражении для определения фазы, которая учитывает вклад нулей аналитической функции G (u) в верхней полуплоскости u^+ комплексной u-плоскости:

$$\varphi(u) = \varphi_{min}(u) + \varphi_B(u) + 2\pi x_0 u,$$
$$\varphi_B = \sum_n \arg \frac{u - u_n}{u - u_n^*}. \tag{3}$$

Фаза φ_{min} определяется соотношением (1), φ_B – фаза Блашке, u_n и u_n^* – координаты комплексных и комплексно сопряженных нулей. Последний член в (3), не влияя на форму профиля E(x), определяет его положение на оси x. Вопрос о роли комплексных нулей функции G(u) и, соответственно, о влиянии φ_B на восстанавливаемые распределения E(x) до конца не исследован. В этой связи в качестве одного из возможных путей решения фазовой проблемы предлагается использовать соотношение (2), лишенное отмеченных сложностей применения логарифмического ПГ. На основе соотношений

$$\Gamma^2(u) = [\mathrm{Re}\,G(u)]^2 + [\mathrm{Im}\,G(u)]^2 = [\mathrm{Re}\,G(u)]^2 + [\widetilde{H}(\mathrm{Re}\,G)]^2 = [\widetilde{H}\mathrm{Im}\,G]^2 +$$
$$+ [\mathrm{Im}\,G]^2, \tag{4}$$

$$\varphi(u) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,G(u)}{\mathrm{Re}\,G(u)} = \mathrm{arctg}\,\frac{\widetilde{H}(\mathrm{Re}\,G)}{\mathrm{Re}\,G} = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,G}{\widetilde{H}(\mathrm{Im}\,G)} \tag{5}$$

получим третий случай применения ПГ в фурье-образе G(u), на этот раз для определения Re G(u) и Im G(u) по известным Γ(u) или φ(u):

$$\Gamma^2(u) = [\mathrm{Re}\,G(u)]^2 + \frac{4u^2}{\pi^2}\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\,G(u') - \mathrm{Re}\,G(u)}{(u')^2 - u^2}\,du'\right]^2, \tag{6}$$

$$\Gamma^2(u) = \frac{4u^2}{\pi^2}\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,G(u') - \mathrm{Im}\,G(u)}{(u')^2 - u^2}\,du'\right]^2 + [\mathrm{Im}\,G(u)]^2, \tag{7}$$

$$\varphi(u) = \mathrm{arctg}\left\{\frac{2u}{\pi}\int_0^\infty du' \frac{\mathrm{Re}\,G(u') - \mathrm{Re}\,G(u)}{[(u')^2 - u^2]\mathrm{Re}\,G(u)}\right\}, \tag{8}$$

$$\varphi(u) = \mathrm{arctg}\left\{ \mathrm{Im}\,G(u)\left[-\frac{2u}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,G(u') - \mathrm{Im}\,G(u)}{(u')^2 - u^2}\,du' \right]^{-1} \right\}. \qquad (9)$$

Можно сказать, что решение любого из уравнений (6) – (9) – это и есть решение фазовой проблемы. Однако стандартных методов решения нелинейных интегральных уравнений не существует, и получение решения уравненений (6) – (9) представляется нетривиальным.

Можно использовать разложение искомой функции – например, в уравнении (6) на отрезке $(0, u_0)$ по ортогональным полиномам $P_k(y)$:

$$\mathrm{Re}\,G(y) = \sum_{k=0}^{L} a_k P_k(y).$$

В этом случае (6) принимает вид:

$$\Gamma^2(y_i) = \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{L} a_k a_l [P_k(y_i) P_l(y_i) + Q_k(y_i) Q_l(y_i)],$$

где

$$Q_k(y_i) = \frac{2y_i}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_k(y) - P_k(y_i)}{y^2 - y_i^2}\,dy,$$

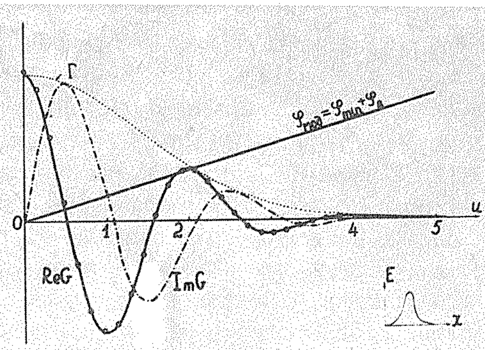
$\Gamma(y_i)$ – значения модуля Γ, измеренные в точках y_i $(i = 1, 2, \dots N)$. Поиск минимума суммы

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ \Gamma^2(y_i) - \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{L} a_k a_l [P_k(y_i) P_l(y_i) + Q_k(y_i) Q_l(y_i)] \right\}^2$$

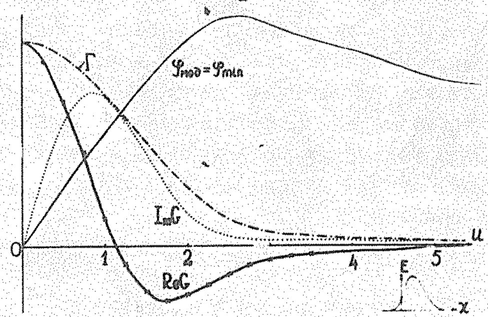
приводит к системе $L + 1$ уравнения третьего порядка относительно искомых коэффициентов разложения a_k $(k = 0, 1, \dots L)$:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ \left[\Gamma^2(y_i) - \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{L} a_k a_l (P_k P_l + Q_k Q_l) \right] \sum_{l=0}^{L} a_l (P_k P_l + Q_k Q_l) \right\}^2 = 0. \qquad (10)$$

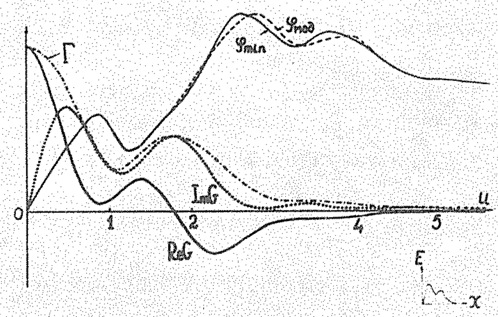
Для типичных радиоастрономических моделей $E(x)$, представимых суммой гауссиан, функции $\mathrm{Re}\,G(u)$, которые должны быть решениями уравнения (6), являются гладкими функциями и хорошо описываются примерно



а



б



в

Рис. 1. Компоненты фурье-образа для моделей $E(x) = e^{-(x-3)^2}$ (а), $E(x) = e^{-(x-1)^2} + 0{,}5e^{-(x-2)}$ (б), $E(x) = e^{-(x-1)^2} + 0{,}5e^{-(x-4)^2}$ (в).

десятью членами разложения в ряд Фурье, по полиномам Лежандра или другим ортогональным полиномам. Таким образом, число уравнений в системе (10) должно быть порядка 10.

На *рис.* 1 в качестве иллюстрации приведены все представления комплексной функции когерентности G(u) для некоторых моделей. Эти рисунки показывают однозначную связь между компонентами фурье-образа G(u): Γ(u), $\varphi_{мод}(u)$, $\varphi_{min}(u)$, ReG(u), ImG(u), которая выражается соотношениями (1), (2), (4) – (9). Кривые ReG(u) на всех рисунках иллюстрируют идеальное решение уравнения (6) при заданных значениях Γ(u) для наших моделей. Крестиками обозначены результаты аппроксимации ReG(u) десятью членами разложения по полиномам Лежандра, кружками – десятью членами ряда Фурье. В заключение отметим, что фукции G(u) всех представленных моделей имеют комплексные нули, которые должны были бы привести к заметному отличию φ_{min} от $\varphi_{мод}$ и, соответственно, к искажению в восстановленных профилях E(x) /5/. Однако во всех рассмотренных случаях восстановленные профили практически совпадают с модельными. Интересно сравнить эти результаты применения минимально-фазового метода с результатами восстановления на основе решения уравнений (6) – (9). Учитывая важность этой проблемы, мы хотели бы привлечь внимание математиков и специалистов по численным методам к разработке алгоритмов решения указанных уравнений.

Авторы благодарны И. Г. Косареву за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обратные задачи в оптике. Под ред. Г. П. Болтса, М., Машиностроение, 1984.
2. Аблеков В. К., Колядин С. А., Фролов А. В. Высокоразрешающие оптические системы. М., Машиностроение, 1985.
3. Косарев И. Г., Малов И. Ф., Фролов В. А. Препринт ФИАН № 90, М., 1980.
4. Гальченко А. А. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 11 (1984).
5. Nussenzweig H. M. J. Mathem. Phys., 8, 561 (1967).

Поступила в редакцию 16 сентября 1985 г.