УДК 533.72

ПУЛЬСАЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛОТНОМ ГАЗЕ

С. Л. Попырин

Исследуются нелинейные кинетические процессы в однокомпонентном плотном газе, описываемые с помощью модельного немарковского кинетического уравнения. Найдено точное решение этого уравнения. Показано, что нестационарные пространственные течения неравновесного плотного газа могут сопровождаться возбуждением пульсационных мод в функции распределения по скоростям.

Интерес к исследованию нелинейных кинетических процессов на малых пространственных и временных масштабах поддерживается различными стимулами, среди которых – развитие физики твердотельных наноструктур и задачи о взаимодействии мощных сверхкоротких лазерных импульсов с веществом. При этом и теория, и эксперимент указывают на необходимость анализа эффектов, обусловленных нелокальным (по пространству и времени) характером межчастичного взаимодействия [1 – 4].

В настоящей работе исследуются нестационарные процессы в однокомпонентном плотном газе, описываемые с помощью модельного нелинейного немарковского кинетического уравнения. С использованием метода [5], который, в определенном смысле, является аналогом метода обратной задачи рассеяния (см. [6]), найдено точное решение этого уравнения. Показано, что нестационарные пространственные течения сильно неравновесного плотного газа могут сопровождаться возбуждением пульсационных мод в функции распределения по скоростям. Характер нелинейного взаимодействия этих пульсационных мод имеет много общего с тем, что наблюдается при развитой гидродинамической турбулентности. Получены оценки условий, при которых возможно возбуждение пульсационных мод. В связи с нетривиальным качественным характером найденных решений они могут оказаться полезны при анализе более сложных задач, в которых необходим учет квантовых эффектов, трехчастичных столкновений и т.д.

Для кинетического описания нестационарных процессов в плотном газе используем модельное немарковское кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right) = \int\limits_0^\infty g(s) Q(F(\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{v}s, t - s)) ds. \qquad (1)$$

Здесь F – функция распределения по скоростям $\mathbf{v}$ и координатам $\mathbf{x}$, t – время, Q – нелинейный оператор столкновений Больцмана (см. [6]),

$$Q(F(\mathbf{v}, x, t)) = \int h(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \vec{\eta})(F(\mathbf{V}, \mathbf{x}, t)F(\mathbf{U}, \mathbf{x}, t) - F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)F(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t))d^2\vec{\eta} d^3\mathbf{u},$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ – скорости молекул до столкновения; $\vec{\eta}$ – характеризующий направление переданного при столкновении импульса вектор единичной длины; $\mathbf{V} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \vec{\eta})$, $\mathbf{U} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \vec{\eta})$ – скорости молекул после столкновения; $h(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \vec{\eta})$ – ядро интеграла столкновений; $g(s)$ – плотность вероятности того, что длительность межмолекулярного столкновения равна s. Модельное кинетическое уравнение (1) естественным образом обобщает нелинейное уравнение Больцмана, учитывая длительность парных столкновений молекул, но пренебрегая их тройными столкновениями, что можно сделать, например, для плотного газа, молекулы которого могут образовывать между собой водородные связи [7].

При рассмотрении изотропной релаксации пространственно-однородного плотного газа, когда $F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = f(|\mathbf{v}|, t)$, ограничившись в уравнении (1) только членами первого порядка по s, преобразуем его к виду:

$$\partial f/\partial t + \tau \partial^2 f/\partial t^2 = Q(f(\mathbf{v}, t)), \qquad (2)$$

где $\tau = \int\limits_0^\infty sg(s)ds$ – средняя длительность межмолекулярного столкновения. При этом f может быть разложена в ряд по полиномам Лагерра $L_n^{(1/2)}$:

$$f(v, t) = f_M(v) \sum_{n=0}^\infty c_n(t) L_n^{(1/2)}(mv^2/2\Theta), \qquad (3)$$

где $f_M(v)$ – функция распределения Максвелла, Θ – температура, m – масса молекулы, $c_0(t) \equiv 1$ и $c_1(t) \equiv 0$ в силу сохранения энергии и числа молекул.

Используя разложение нелинейного оператора столкновений Больцмана Q в ряд по собственным функциям соответствующего ему линеаризованного оператора [5], получаем, что в случае максвелловских молекул, т.е. при $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \vec{\eta}) = B((\mathbf{u} - \mathbf{v}, \vec{\eta})/|\mathbf{u} - \mathbf{v}|)$,

$c_n(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\tau\ddot{c}_n + \dot{c}_n + b_n c_n = \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k H_n^{(n-k)} c_k(t) c_{n-k}(t). \tag{4}$$

Здесь $b_n = 4\pi \int\limits_0^1 B(1-2s)(1-s^n-(1-s)^n)ds$ – собственные значения линеаризованного оператора столкновений Больцмана, C_n^k – биномиальные коэффициенты, $H_n^k = 4\pi \int\limits_0^1 B(1-2s)(1-s)^n s^k ds$ – коэффициенты межмодового взаимодействия.

Нелинейная система (4) разрешима рекуррентным образом, при этом ее общее решение может быть записано в виде

$$c_n(t) = \sum_{j=1}^{2} A_{jn} \exp(\gamma_{jn} t) + \sum_{i=1}^{\infty} B_{in} \exp(\Gamma_{in} t). \tag{5}$$

Здесь γ_{jn} – корни характеристических уравнений, соответствующих уравнениям (4), линеаризованным при $|c_n(t)| << 1$; каждое из Γ_{in} – сумма нескольких таких корней; A_{jn} и B_{in} – постоянные коэффициенты.

Таким образом, качественные свойства решения (3) в значительной степени определяются свойствами корней характеристических уравнений:

$$\tau\gamma^2 - \gamma + b_n = 0. \tag{6}$$

Если $\alpha = \Lambda\tau < 0,25$, где $\Lambda = 4\pi \int\limits_0^1 B(z)dz$, то все корни (6) вещественны, поэтому релаксация всех мод в (3) является монотонной при $t >> \tau$. При $0,25 < \alpha < 0,25\Lambda/b_2$ у некоторых корней мнимая часть отлична от нуля, поэтому релаксация некоторых мод имеет пульсационный характер. При $\alpha > 0,25\Lambda/b_2$ у всех корней мнимая часть отлична от нуля и релаксация всех мод имеет пульсационный характер. Таким образом, увеличение α сопровождается появлением пульсационных мод в (3) (см. рис. 1). Этот эффект также имеет место, если в (1) не делается пренебрежения членами высшего порядка по s, и зависимость c_n от времени описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием [7].

Среди нестационарных пространственных течений неравновесного газа особое место занимает автомодельное решение типа "изотропный разлет" [8]. Соответствующее такому течению решение (1) ищем в виде: $F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \chi(t))$. При этом

$$\chi'(t)\frac{\partial f}{\partial \chi} = \int\limits_0^\infty g(s) Q(f(x - vt, \chi(t-s)) t^{-3} ds. \tag{7}$$

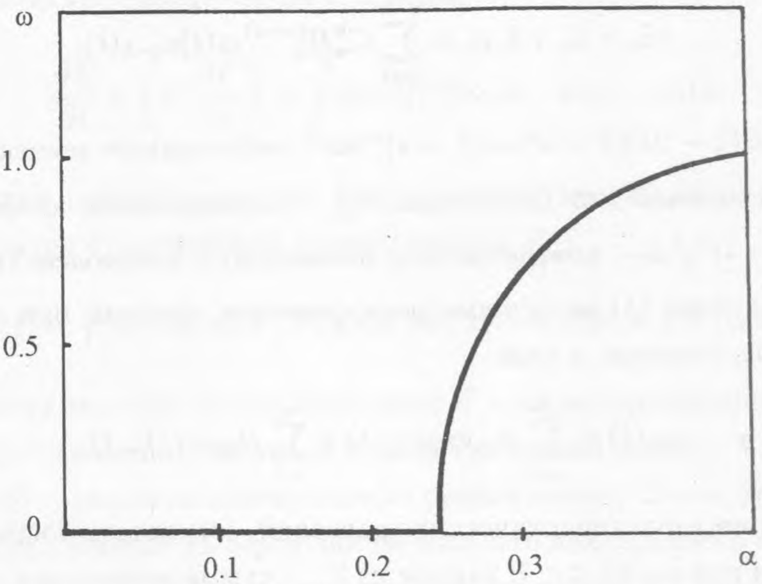

Рис. 1. *Зависимость безразмерной частоты пульсаций $\omega = \Lambda^{-1}\mathrm{Im}\gamma$ от параметра нелокальности α.*

Уравнение (7) удовлетворяется с точностью до членов первого порядка по τ, если $\chi'(t) = t^{-3}$, а $f(v,\chi)$ является решением уравнения

$$\partial f/\partial\chi + (\tau/t^3(x))\partial^2 f/\partial x^2 = Q(f). \tag{8}$$

Оно отличается от (2) только тем, что коэффициент при второй производной в (8) зависит от времени. Его решение имеет аналогичный (3) вид

$$f(\mathbf{v},\chi) = f_M(v)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\chi) L_n^{(1/2)}(mv^2/2\Theta), \tag{9}$$

где $c_n(\chi)$ удовлетворяют системе уравнений

$$c_n''(\chi)\tau t^{-3}(\chi) + c_n'(\chi) + b_n c_n(\chi) = \sum_{k=2}^{n-2} C_n^k H_k^{(n-k)} c_k(\chi) c_{n-k}(\chi). \tag{10}$$

Система (10) тоже может иметь решения пульсационного типа. Однако при этом происходит полное прекращение пульсаций в течение конечного промежутка времени, после чего релаксация всех мод в (9) становится монотонной.

Используя оценку $\alpha \sim d/L$, где L – средняя длина свободного пробега молекул, d – характерный размер молекулы (см. [6]), получаем, что пульсационные моды могут возбуждаться при $d/L \gtrsim 0,25$. Для водяного пара это соответствует плотности $\rho \gtrsim 0,1\rho_K$, где ρ_K – плотность в критической точке.

Таким образом, учитываемый моделью (1) немарковский характер кинетических процессов приводит к появлению пульсационных мод при пространственно однородной релаксации плотного газа и его нестационарных пространственных течениях. При этом пульсационные моды с более низкой частотой возбуждают пульсационные моды с более высокой частотой, а диссипация высокочастотных мод значительно сильнее, чем низкочастотных. Поэтому картина нелинейного взаимодействия пульсационных мод функции распределения в определенном смысле аналогична картине развитой гидродинамической турбулентности.

Известны кинетико-гидродинамические аналоги, например [9, 10], использование которых позволяет достигнуть более полного понимания как кинетических, так и гидродинамических процессов. В связи с этим можно надеяться, что отмеченное выше сходство между нелинейными кинетическими процессами в плотном газе и гидродинамической турбулентностью может оказаться полезным для развития теории гидродинамической турбулентности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 96-15-96427).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gangopadhyay G., Ray D. Phys. Rev. A, **46**, N 36, 1507 (1992).

[2] Шурыгин В. Ю., Юльметьев Р. М. ЖЭТФ, **99**, N 1, 144 (1991).

[3] Gumerov F. M., Kozyrev B. M., Vishnevskaja G. P. Mol. Phys., **29**, N 3, 937 (1975).

[4] Pasterny K., Kocot A. Chem. Phys. Lett., **139**, N 4, 295 (1987).

[5] Бобылев А. В. ДАН, **225**, N 6, 1296 (1975).

[6] Эрнст М. Х. В кн.: Неравновесные явления. М., Мир, 1986.

[7] Попырин С. Л. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9-10, 27 (1996).

[8] Никольский А. А. ДАН, **151**, N 2, 299 (1963).

[9] Бункин Ф. В., Воляк К. И., Краснослободцев А. В. ДАН, **301**, N 5, 1072 (1988).

[10] З а х а р о в В. Е., К у з н е ц о в Е. А. УФН, **167**, N 11, 1137 (1997).

Поступила в редакцию 6 февраля 1998 г.