

УДК 534.05179

## ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ ПОЛИМОДАЛЬНОСТЬ МЕЖВСПЫШЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛОВ В КОЛЬЦЕ ОДИНАКОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е. И. Волков, Д. В. Волков

*Обнаружено, что в кольце из трех одинаковых симметрично связанных осцилляторов аддитивный некоррелированный белый шум может приводить не только к естественному разбросу периодов синфазных колебаний, но и к образованию дискретного спектра межвспышечных интервалов.*

Нелинейные автоколебательные системы часто демонстрируют разнообразие динамических режимов даже при почти постоянных внешних параметрах. Известно, что взаимодействие между осцилляторами может быть одним из механизмов генерации разнообразия. Давно показано, что связь одинаковых быстрых биохимических осцилляторов может объяснить образование суточных ритмов [1]. Аналогичные задачи естественно возникают при моделировании ритмики походок [2, 3], моделировании разнообразия длительностей клеточного цикла [4] и т.д.

Ранее при изучении систем из двух и трех одинаковых осцилляторов было показано теоретически [5 – 9] и экспериментально [10 – 12], что локальный диффузионный обмен порождает несколько предельных циклов с разными периодами. Детальное изучение динамики ансамблей одинаковых релаксационных осцилляторов выявило важную роль степени жесткости изолированного осциллятора (которая есть отношение характерных времен изменения быстрой и медленной переменных) и обмена именно медленной переменной для генерации большого числа периодических аттракторов [13, 14].

Обмен медленной переменной является одним из вариантов ингибиторной связи, т.к. он способен существенно замедлять движение системы на значительных промежутках предельного цикла. В системах из трех одинаковых осцилляторов с циклическими граничными условиями наибольший объем параметрического пространства занимают различные типы так называемых "вращающихся волн" (ВВ) – периодических решений

с одним или несколькими субпериодами, в которых развертки  $X_i(t)$  одинаковы у всех осцилляторов и разность фаз между элементами цепочки равна трети периода. Второй тип решения – противофазный аттрактор (ПФА) – характеризуется отсутствием разности фаз у двух осцилляторов, которые совершают колебания со сдвигом в половину периода относительно третьего осциллятора. Существование обоих типов аттракторов не зависит от выбора нелинейного осциллятора, но размеры областей параметрического пространства, в которых существуют устойчивые несинфазные периодические решения, весьма чувствительны к выбору модели.

В отличие от цитированных выше работ, в которых рассматривалась главным образом детерминированная динамика, в настоящей работе проведен численный анализ стохастической динамики кольца из трех двумерных релаксационных электронных осцилляторов в окрестности бифуркации перехода колебаний в устойчивое однородное стационарное состояние, где детерминированная динамика достаточно проста, т.е. система может иметь один или два периодических аттрактора. Показано, что аддитивный белый шум приводит не только к ожидаемому расширению пиков в распределениях длительностей межвспышечных интервалов, соответствующих детерминированным аттракторам, но и порождает набор дискретных пиков в этих распределениях.

Электронные осцилляторы (на рис. 1 представлено кольцо из трех связанных осцилляторов) представляют собой  $LC$ -контур с нелинейным сопротивлением  $R_{nl}$ , которое обеспечивает  $N$ -образную вольт-амперную характеристику, и, следовательно,  $N$ -образную изоклину  $S(I)$  в системе дифференциальных уравнений, описывающих схему на рис. 1

$$L \frac{dI_i}{dt} = U_i - S(I_i), \quad (1)$$

$$C \frac{dU_i}{dt} = \frac{U_V + U_i}{R_V} - I_i + \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{R_c}, \quad (2)$$

здесь индекс  $i = 1, 2, 3(mod 3)$ . Величина  $\kappa = L/R_V^2 C$  определяет отношение характерных времен изменения быстрой переменной  $I$  к медленной переменной  $U$  и, следовательно, степень жесткости осциллятора. При нашем выборе параметров  $\kappa \simeq 10^{-5}$ , что позволяет рассматривать осциллятор как сильно релаксационный и применить специальный метод интегрирования (см. ниже).

Нелинейное сопротивление является, в свою очередь, отдельным электронным устройством. Вольт-амперная характеристика этого устройства получена экспериментально, подробнее см. [15]. Развертки для изолированного осциллятора  $U(t)$  и  $I(t)$  и

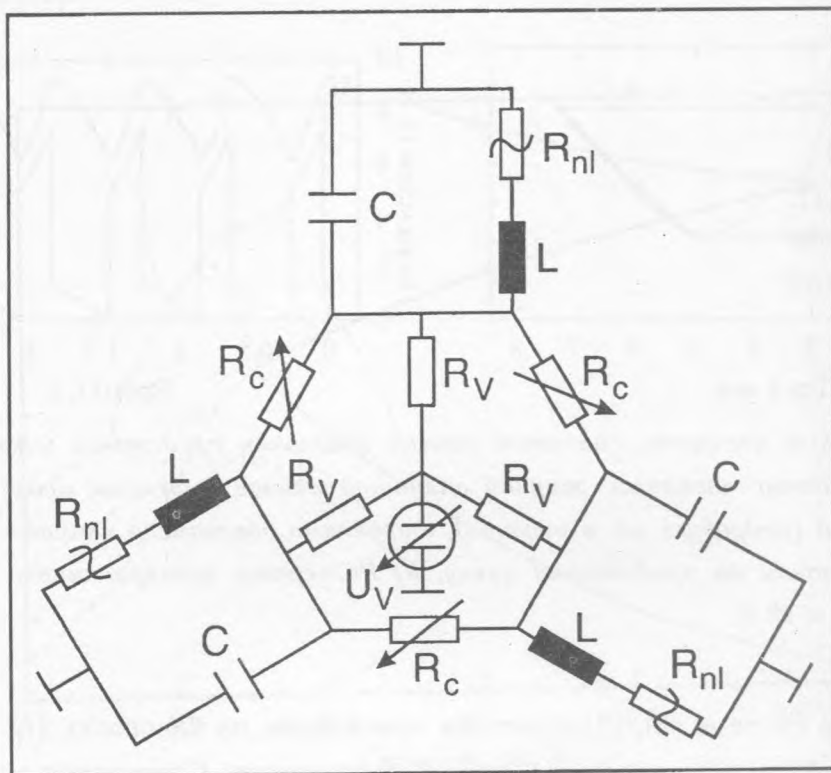


Рис. 1. Схема из трех электронных устройств, содержащих нелинейные сопротивления  $R_{nl}$ . Параметры схемы:  $C = 215 \text{ мкФ}$ ,  $L = 33 \text{ мГ}$ ,  $R_V = 3,9 \text{ кОм}$ . Сопротивление  $R_c$  задает силу связи между осцилляторами. Напряжение питания  $U_V$  является бифуркационным параметром, влияющим на характеристики отдельного осциллятора.

фазовый портрет представлены соответственно на рис. 2а и 2б. Развертка быстрой переменной  $I(t)$  представляет собой последовательность вспышек (нижняя кривая на рис. 2б), расстояния между которыми равны периоду колебаний изолированного осциллятора. При наличии взаимодействия осцилляторов расстояния между вспышками (межвспышечные интервалы (МИ)) отражают динамику ансамбля.

При решении уравнений (1), (2) был использован приближенный численный метод [16]. В случае, когда рассматриваемая система сильно релаксационна ( $R_V^2 C \gg L$ ), изображающая точка при отклонении от предельного цикла быстро возвращается обратно по почти горизонтальной траектории на медленный участок предельного цикла. Поэтому связь диффузионного типа по медленной переменной влияет только на разность фаз между осцилляторами и почти не влияет на траекторию движения отдельного ос-

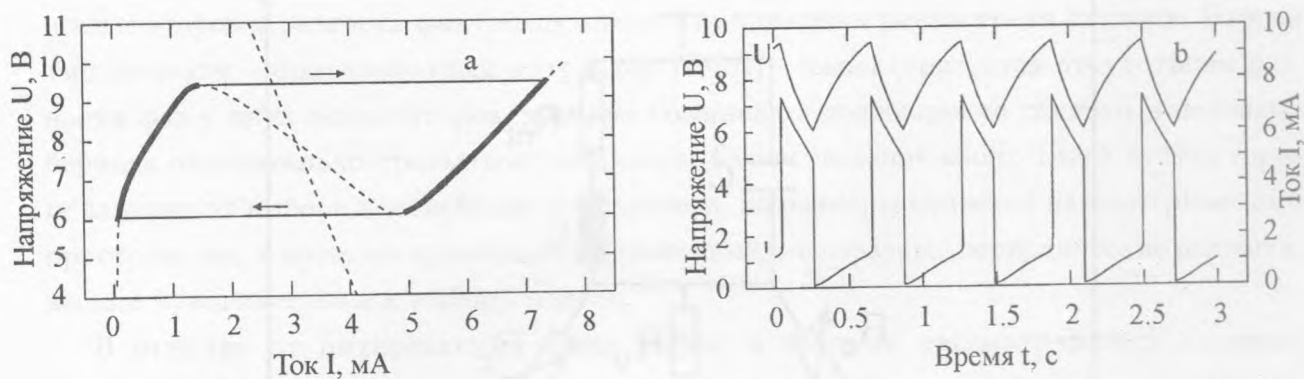


Рис. 2. а) Фазовый портрет, сплошной линией обозначен предельный цикл, пунктирными линиями – главные изоклины, жирной сплошной линией выделены медленные участки предельного цикла (подробнее см. в тексте), стрелками обозначено направление движения изображающей точки по предельному циклу, б) Развертки изолированного электронного осциллятора,  $U_V = 18$  В.

циллятора, т.е. в системе (1), (2) проекция траектории на плоскость  $(I_i, U_i)$  такая же, как и предельный цикл для изолированного осциллятора. Следовательно, существует возможность моделировать поведение системы (1), (2), основываясь на одномерной модели медленных движений отдельного осциллятора. Для построения модели медленных движений, т.е.  $U_i(t)$ , использовалась линеаризация зависимости  $\dot{U}(U)$  для медленных участков траектории предельного цикла, на рис. 2а эти участки обозначены жирной сплошной линией. Медленные участки траектории предельного цикла были разбиты на несколько отрезков, в пределах каждого из отрезков поведение системы (1), (2) можно приближенно описать неоднородной системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты в такой системе зависят от того, на каком именно отрезке медленного участка предельного цикла находится каждый из осцилляторов. Значения коэффициентов линейной системы и их зависимости от параметра  $U_V$  рассчитываются заранее. Движения по быстрым участкам сводятся к мгновенным скачкам с одного медленного участка на другой, как в случае приближения разрывных колебаний. Интегрирование построенной линейной системы дифференциальных уравнений осуществлялось методом Эйлера первого порядка с постоянным шагом. На каждом новом шаге производился выбор новых коэффициентов линейной системы, если это необходимо. Выбор границ отрезков на медленных участках траектории, способ расчета коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений, алгоритм расчетов

можно найти в [16].

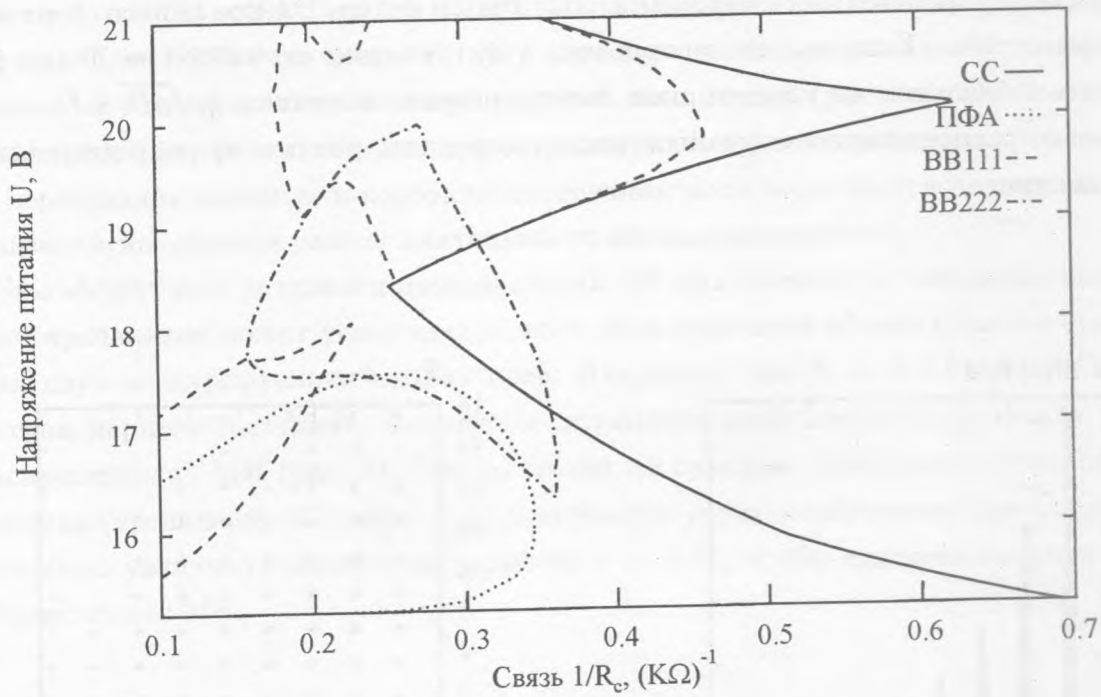


Рис. 3. Часть фазовой диаграммы для кольца из трех одинаковых электронных осцилляторов. Граница устойчивого неоднородного стационарного состояния СС отмечена сплошной линией. В этой области два осциллятора имеют большие значения медленных переменных и малые величины быстрых переменных, в то время как третий осциллятор фиксирован при малом  $U$  и большом  $I$ . ВВ111, ВВ222 – режимы вращающихся волн, ПФА – противофазное решение.

Часть фазовой диаграммы, соответствующая изменению параметров  $U_V$  и  $K = R_c^{-1}$  соответственно в интервалах  $(15,2 - 21) В$  и  $(0,1 - 0,7) кОм^{-1}$ , для кольца из трех одинаковых электронных осцилляторов приведена на рис. 3. Вблизи границы области существования колебаний в изолированном осцилляторе ( $U_V = 15,2 В$ , при указанном выборе других параметров) и в широком интервале значений сил связи легко образуются простые ВВ и противофазный аттрактор. При больших связях обмен ингибитором приводит к образованию неоднородного устойчивого стационарного состояния (так наз. "фазовая смерть").

Для изучения влияния внешнего шума на динамику системы (1), (2) к правой части

уравнений (2) была добавлена нормально распределенная случайная величина  $\xi_i(t)$ , где  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_i(t), \xi_j(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \delta_{ij} \delta(\tau)$ . Как было описано выше, интегрирование системы (1), (2) производилось методом, аналогичным методу Эйлера первого порядка с постоянным шагом. Если шаг интегрирования  $h \ll 1$ , влияние случайной величины  $\xi_i(t)$  сводится к добавлению на каждом шаге интегрирования величины  $\eta_i \sqrt{\sigma^2 h}$  к  $U_i$ , где  $\eta_i$  – нормально распределенное случайное число со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

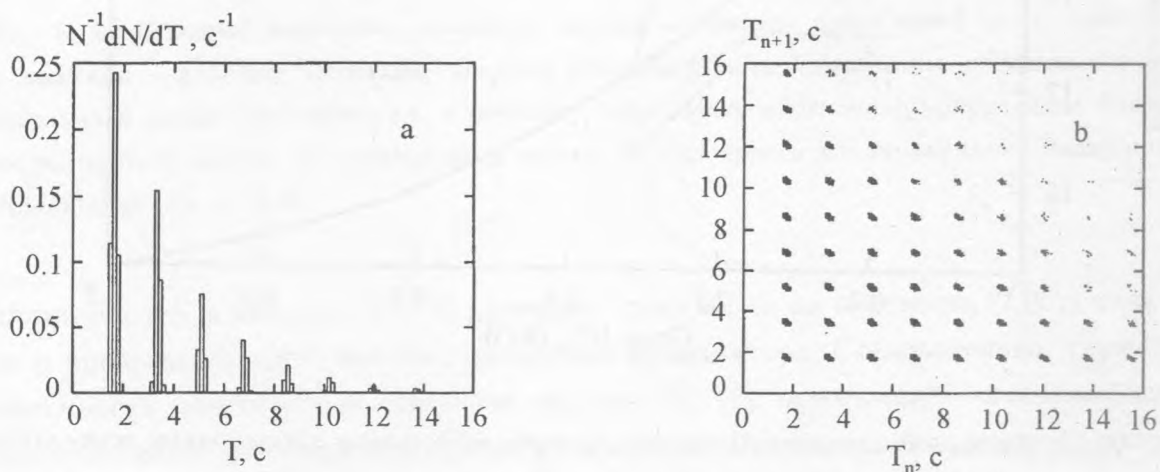


Рис. 4. Индуцированное шумом распределение длительностей межвспышечных интервалов (a) и отображения  $T_{n+1} = F(T_n)$  (b) вблизи однородного стационарного состояния,  $U_V = 15,21$  В,  $K = 0,4$  кОм $^{-1}$ ,  $\sigma = 0,001$ , общее количество межвспышечных интервалов  $N = 26794$ .

Выбор амплитуды шума (параметр  $\sigma$ ) весьма важен для оптимального выявления влияния шума на динамику. Наиболее чувствительным к шуму является аттрактор ВВ222, в котором на каждый полный цикл приходится две вспышки быстрой переменной. Расчеты показали, что этот аттрактор имеет большое время жизни вплоть до значений амплитуд шума порядка  $\sigma = 0,006$ , в окрестности которых и проводились основные вычисления.

Для анализа стохастических режимов вблизи однородного стационарного состояния выбран интервал величин связи, в котором существует только синфазный аттрактор. Эффект шума удобно изучать, анализируя распределения МИ и отображения последовательных интервалов  $T_{n+1}(T_n)$ , которые представлены на рис. 4 для  $K =$

$0,4 \kappa \text{Ом}^{-1}$ ,  $U_V = 15,21 \text{ В}$ . Были вычислены достаточно длинные траектории, обеспечивающие большое число ( $N > 20000$ ) МИ. Аналогичные распределения получаются во всей области  $K$  от  $0,35 \kappa \text{Ом}^{-1}$  до  $0,6 \kappa \text{Ом}^{-1}$ . Шумовой эффект не сводится к расширению пика при  $T = 1,98 \text{ с}$  (что соответствует периоду синфазных колебаний), а порождает дискретный спектр интервалов с убывающей амплитудой (рис. 4а). Отображение на рис. 4б двумерно, что свидетельствует о принципиальной возможности любых комбинаций чередования длинных и коротких интервалов, хотя вероятности последовательной реализации интервалов разной длительности сильно различаются.

Сам эффект дискретизации распределений МИ мало зависит от величины сил связи, но его проявление может усложняться, если шум действует вблизи области существования двух конкурирующих аттракторов. Например, при  $K = 0,6 \kappa \text{Ом}^{-1}$ , т.е. вблизи стационарного состояния, появляется дополнительный промежуток между пиками в распределениях МИ (рис. 5). При удалении от границы однородного стационарного состояния (увеличение  $U_V$ ) эффект дискретизации резко ослабляется. При  $U_V = 15,4 \text{ В}$  необходимо увеличить амплитуду шума до  $\sigma = 0,01$ , чтобы надежно выявить пики в распределениях МИ.

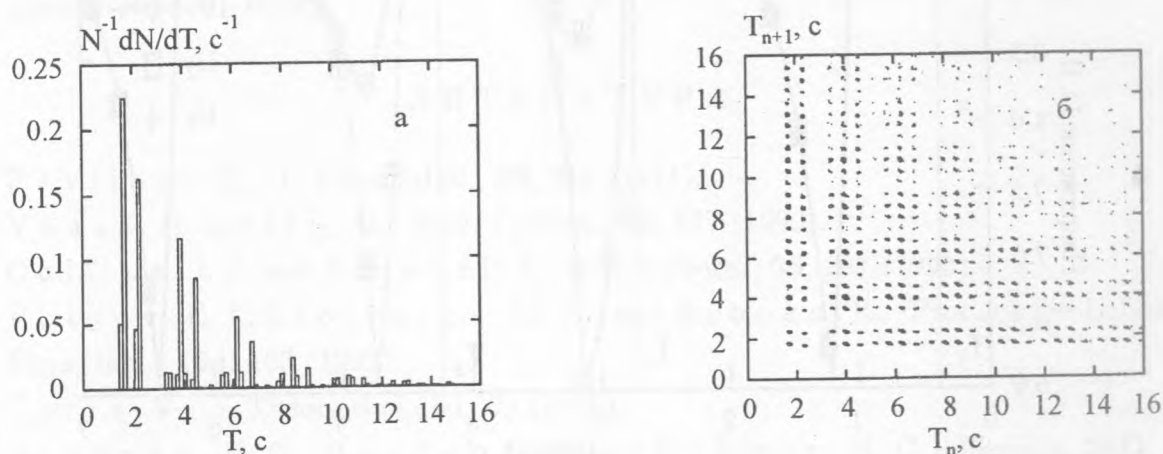


Рис. 5. То же, что и на рис 4, но вблизи фазовой смерти:  $U_V = 15,21 \text{ В}$ ,  $K = 0,6 \kappa \text{Ом}^{-1}$ ,  $N = 22118$ .

Подробное обсуждение причин обнаруженного эффекта выходит за рамки данного сообщения. Однако из приведенных результатов численного исследования ясно, что

ключевая роль принадлежит обмену ингибитором и близости системы к бифуркации в однородное состояние. На рис. 6 приведены развертки медленных переменных осцилляторов при наличии шума. Рассмотрим три осциллятора в синфазном режиме (момент  $T_1$ ). Некоррелированный шум вызывает преждевременный скачок изображающей точки одного из осцилляторов на другую ветвь изоклины (момент  $T_2$ ) и резкое уменьшение величины его медленной переменной (вспышка быстрой переменной). После скачка образуется отток ингибитора от соседних осцилляторов, приводящий к их задержке вблизи максимума изоклины, длительность которой равна времени возвращения изображающей точки на медленную ветвь изоклины и выравнивания значений медленных переменных (момент  $T_3$ ). Так получается второй пик в распределениях МИ. Если шум приведет к повторной задержке того же осциллятора по описанному механизму, то это будет вклад в третий пик в распределениях МИ и т.д. Близость к однородному стационарному состоянию важна, т.к. в этом случае даже небольшое уменьшение  $U_V$  за счет оттока ингибитора  $K(U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i)$  приводит к задержке изображающей точки на медленной ветви изоклины.

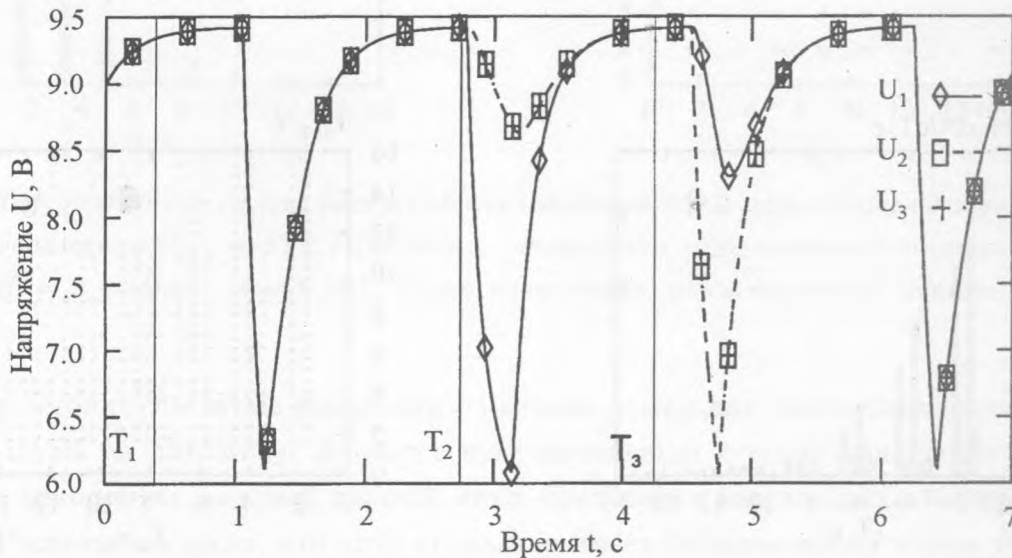


Рис. 6. Развертки медленных переменных  $U_1, U_2$  и  $U_3$  в системе под действием шума.  $U_V = 15,21 \text{ В}$ ,  $K = 0,4 \text{ км}^{-1}$ ,  $\sigma = 0,0005$ . Подробные объяснения см. в тексте.

Таким образом, численный анализ показал, что в присутствии простой диффузии медленной переменной, которая способна замедлять движение изображающей точки по



предельному циклу, некоррелированный белый шум может приводить к принципиальным изменениям в динамике связанных осцилляторов. Он порождает дискретные распределения МИ в той области параметров, где доминирует синфазный режим. Добавление некоррелированного шума можно рассматривать как введение кратковременной неидентичности между осцилляторами. Детерминированная неидентичность (например, различие величин  $U_V$  для разных осцилляторов) есть дополнительный параметр системы, изменения которого могут вызывать бифуркации появления новых периодических решений. В частности, ранее было показано численно и экспериментально [15], что вблизи однородного стационарного состояния системы (1), (2) малая расстройка приводит к образованию так наз. "динамической ловушки", в которой два осциллятора колеблются противофазно, а замедленный осциллятор не совершает полноамплитудных колебаний. Мы полагаем, что эффект дискретизации распределений МИ можно рассматривать как "шумовой предшественник" [17] динамической ловушки.

Отметим также, что появление дискретизации МИ не зависит от специфики осциллятора и метода вычислений, т.к. аналогичные результаты получаются для кольца из трех релаксационных осцилляторов ван дер Поля, исследованных традиционными численными методами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 96-01-00102.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pavlidis T. J. Theor. Biol., **33**, 319 (1971).
- [2] Yuasa H. and Ito M. Biol. Cybern., **63**, 177 (1990).
- [3] Collins J. J. and Stewart I. Biol. Cybern., **68**, 287 (1993).
- [4] Volkov E. I., Stolyarov M. N., and Brooks R. Proc. of the Lebedev Phys. Inst., **194**, 183 (1992).
- [5] Torre V. J. Theor. Biol., **61**, 55 (1976).
- [6] Aronson D. G., Doedel E. J., and Othmer H. G. Physica, **25D**, 20 (1987).
- [7] Aronson D. G., Ermentrout G. B., and Kopell N. Physica, **41D**, 403 (1990).
- [8] Schreiber I., Holodniok M., Kubicek M., and Marek M. J. Stat. Phys., **43**, 489 (1986).
- [9] Ashwin P., King G. P., and Swift J. W. Nonlinearity, **3**, 585 (1990).

- [10] Crowley M. F. and Epstein I. R. J. Phys. Chem., **93**, 2496 (1989).
- [11] Yoshimoto M., Yoshikawa K., and Mori Y. Phys. Rev., **47E**, 864 (1993).
- [12] Ruwisch D., Bode M., Schutz P., and Markus M. Phys. Lett., **186A**, 137 (1994).
- [13] Volkov E. I. and Stolyarov M. N. Phys. Lett., **159A**, 61 (1991).
- [14] Volkov E. I. and Stolyarov M. N. Biol. Cybern., **71**, 451 (1994).
- [15] Ruwisch D., Bode M., Volkov D. V., and Volkov E. I. Int. J. Bifurcation and Chaos (submitted to publ.).
- [16] Волков Д. В., Столяров М. Н., Волков Е. И. Изв. ВУЗов "Проблемы нелинейной динамики", **4**, 3 (1996).
- [17] Neiman A., Saragin P. I., and Stone L. Phys. Rev., **56E**, 270 (1997).

Поступила в редакцию 17 февраля 1998 г.