Краткие сообщения по физике № 1 1984

КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ЗАТУХАНИЕ ЗВУКОВ В ИЗОТРОПНОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В. Г. Валеев, Ю. А. Кухаренко

УДК 132.032

Из кинетического уравнения с интегралом столкновений, сохраняющим полное число частиц, выведены уравнения двухжидкостной гидродинамики для чистой изотропной сверхтекучей ферми-жидкости с учетом вязкости и теплопроводности. Исследовано затухание первого и второго звуков.

Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости были феноменологически получены Ландау /I/ и Халатниковым /2/. Микроскопический вывод таких уравнений для сверхтекучей бозе-жидкости дан Боголюбовым /3/. В работе /4/ на основе кинетического уравнения для одноэлектронной матрицы плотности, выведенного в /5/, получены уравнения двухжидкостной гидродинамики неидеальной сверхтекучей ферми-жидкости. Однако кинетическое уравнение /4,5/ не сохраняет число частиц в системе и не согласуется с уравнением непрерывности для объемной плотности электронов. Для последовательного получения уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости нужно исходить из правильного кинетического уравнения, которое имеет необходимое число законов сохранения: для плотности числа частиц, проекции спина, импульса, энергии и для сверхтекучей скорости. Такое уравнение было получено в работе /7/. Характерная особенность этого кинетического уравнения заключается в том, что его интеграл столкновений недиагонален в квазичастичном или ν-представлении.

Рассмотрим беспримесную ситуацию. Кинетическое уравнение для одноэлектронной матрицы плотности сверхпроводника $\hat{\rho}(\vec{r}, \vec{p}, t)$, полученное в работе /7/, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat\rho + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial\hat\varepsilon_p}{\partial\vec p}, \frac{\partial\hat\rho}{\partial\vec r}\right]_+ - \left[\frac{\partial\hat\varepsilon_p}{\partial\vec r}, \frac{\partial\hat\rho}{\partial\vec p}\right]_+\right\} + i\left[\hat\varepsilon_p, \hat\rho\right]_- = \hat R^{(2)}\{\hat\rho\}. \quad (I)$$

где $[\hat A, \hat B]_\pm = \hat A\hat B \pm \hat B\hat A$; в традиционных обозначениях

$$\hat\varepsilon_p = \tilde\xi_p\hat\sigma_z - \Delta\hat\sigma_x + \vec p\vec v_s, \quad \tilde\xi_p = \frac{p^2}{2m} - \tilde\mu;$$

$$\tilde\mu = \lambda - \frac{1}{2}|g|n - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\chi - \frac{1}{2}mv_s^2. \quad (2)$$

Матрицы Паули $\{\hat\sigma\}$ имеют стандартный вид до преобразования Боголюбова, а матрицы $\{\hat\tau\}$ – в ν-представлении. Например,

$$\hat\sigma_z = (\tilde\xi_p/\varepsilon_p)\hat\tau_3 - (\Delta/\varepsilon_p)\hat\tau_1.$$

Исходя из (I), с учетом свойств интеграла столкновений, полученных в /7/, можно показать, что выполняются законы сохранения для объемных плотностей числа частиц, тока и энергии.

Для слабонеравновесных состояний имеем

$$m\frac{\partial}{\partial t}\vec v_s + \frac{\partial}{\partial\vec r}\left[(\mu_o(T, n, u) + \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mu^2 + \delta\tilde\mu\right] = 0, \quad (3)$$

где $\vec u = \vec v_s - \vec v_n$, $\delta\tilde\mu$ – неравновесная добавка к самосогласованному параметру $\tilde\mu$, $\vec v_n$ – скорость нормальной компоненты.

Равновесное решение $\hat\rho_o$ обращает в нуль интеграл столкновений и коммутирует с равновесной матрицей энергии самосогласованного поля $\hat\varepsilon_p$. Для систем с компенсированной проекцией спина s_z, которые мы здесь рассматриваем,

$$\hat\rho_o = n_o\left[(\varepsilon_p\hat\tau_3 + \vec p\vec u)/T\right], \quad (4)$$

где $n_o(x)$ – фермиевская функция, T – температура. Мы будем решать кинетическое уравнение методом Чепмена – Энскога. Решение нулевого приближения $\hat\rho_1$ приводит к уравнениям гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости. Для нахождения поправки первого порядка к матрице плотности запишем ее в виде

$$\hat\rho = \hat\rho_1 + \delta[\hat\rho_o] + \delta\tilde\rho, \quad (5)$$

где $\hat{\rho}_o$ взята на истинном неравновесном спектре. Линеаризуя (I) относительно $\delta\tilde{\rho}$, получим линейное неоднородное интегральное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial\vec{p}}, \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right]_+ - \left[\frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial\vec{r}}, \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right]_+\right\}\right)\hat{\rho}_1 = \hat{L}\{\delta\tilde{\rho}\}, \qquad (6)$$

где $\hat{L} \equiv -i[\hat{\varepsilon}_p, \ldots]_- + \hat{\mathfrak{I}}^{(2)}, \mathfrak{I}^{(2)}$ – линеаризованный оператор столкновений. Можно показать, что уравнение (6) разрешимо относительно $\delta\tilde{\rho}$ на множестве всех двумерных эрмитовых матриц, обладающих свойством $\langle\hat{\sigma}_y\delta\tilde{\rho}\rangle = 0$, если его неоднородный член вычислять при помощи уравнений нулевого приближения для макроскопических величин. Линеаризованный интеграл столкновений $\hat{\mathfrak{I}}^{(2)}\{\delta\tilde{\rho}\}$ имеет три независимых правых собственных вектора, отвечающих нулевому собственому значению:

$$\delta\tilde{\rho}_n = C_n \frac{\partial}{\partial n}(\hat{\rho}_1)_{T,\vec{u}}, \quad \delta\tilde{\rho}_T = C_T \frac{\partial}{\partial T}(\hat{\rho}_1)_{n,\vec{u}}, \quad \delta\tilde{\rho}_{\vec{u}} = \vec{C}_{\vec{u}} \frac{\partial}{\partial\vec{u}}(\hat{\rho}_1)_{n,T}, \qquad (7)$$

как и в нормальном случае. Появление неравновесной добавки к матрице плотности, содержащей три неизвестные постоянные C_n, C_T и $\vec{C}_{\vec{u}}$ "паразитных" решений (7), сопровождается возникновением самосогласованных неравновесных добавок $\delta\tilde{\mu}$ и $\delta\Delta$ в спектре возбуждений. Для нахождения пяти неизвестных величин мы имеем пять уравнений: два уравнения самосогласования – для модуля и фазы параметра порядка и три условия нормировки $\hat{\rho}_1$ на истинные значения n, $\vec{J}$ и E.

Приведем сразу окончательные выражения для кинетических коэффициентов.

I. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$:

$$\varkappa = \begin{cases} C\,\dfrac{n}{m}\,\dfrac{1}{(mgp_F)^2}\,\dfrac{\mu_F}{T}, & T \to 0, \\[2ex] C'\,\dfrac{n}{m}\,\dfrac{T_c}{\nu_o}\,(1 - \Delta/T_c), & T \to T_c - 0, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\nu_0 = (mgp_F)^2 T_c^2/\mu_F$ – частота el–el–столкновений в нормальном металле при $T = T_c$.

2. Коэффициент сдвиговой вязкости η:

$$\eta = \begin{cases} b\,\dfrac{n}{m}\,\dfrac{1}{(mgp_F)^2}\,\dfrac{\mu_F^2}{\Delta_0 T}, & T \to 0, \\ b'\,\dfrac{n}{m}\,\dfrac{\mu_F}{\nu_0}\left(1 - B'_\alpha \dfrac{\Delta}{T_c}\right), & T \to T_c - 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Коэффициент η определяется ν–диагональными компонентами матрицы плотности. В отличие от результата работы /4/, $\eta \sim 1/T$ вблизи нуля температуры.

3. В задаче о второй вязкости

$$\zeta_3 = \begin{cases} c\,\dfrac{1}{nm}\,\dfrac{1}{(mgp_F)^2}\left(\dfrac{\mu_F}{\Delta_0}\right)^2, & T \to 0, \\ \dfrac{1}{\nu_\gamma}\,\dfrac{p_F^2}{3mn}\,\dfrac{1}{m}\,\dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{T_c}{\Delta}, & T \to T_c - 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Величина объемной вязкости ζ_3 при $T \to T_c - 0$ определяется вкладом ν–недиагональных компонент $\tilde{\rho}$. В (10) – (11) B'_α, c, c', b, $b' > 0$ – безразмерные константы, ν_γ – время "недиагональной" релаксации; при $T \to T_c - 0$: $\nu_\gamma \approx \nu_0$.

В сверхпроводниках коэффициент ζ_3, наряду с проводимостью σ, определяет глубину проникновения продольного поля $l_E = (\sigma\zeta_3 m/e^2)^{1/2}$. Отметим, что найденная нами величина ζ_3 в точности соответствует результату работы /9/, полученному методом функций Грина, проинтегрированных по энергии.

Исследованию второго звука в сверхпроводниках посвящена работа Гинзбурга /6/ (см. также обзор /8/). Коэффициенты затухания звуков вычислены в /2/. Линеаризуя систему гидродинамических уравнений и используя формулы (8) – (10), найдем коэффициенты затухания первого ($\alpha_1(\omega, T)$) и второго звуков в сверхтекучей ферми-жидкости:

$$\alpha_1(\omega,\ T) = \frac{2\omega^2}{\sqrt{3} n v_F^3}\,\eta \sim \frac{\omega^2}{m v_F^3} \begin{cases} \left(\frac{\mu_F}{\Delta_0}\right)^2 \frac{1}{(mgp_F)^2} \frac{\Delta_0}{T}, & T \to 0, \\ \frac{\mu_F}{\nu_0} \left(1 - B_\alpha'' \frac{\Delta(T)}{T_c}\right), & T \to T_c - 0, \end{cases} \qquad (11)$$

$$\alpha_2(\omega,\ T) = \frac{\omega^2}{2 n u_2^3} \frac{\varkappa}{c_V} \sim \frac{\omega^2}{v_F} \begin{cases} \frac{\mu_F^4}{(T\Delta_0)^{5/2}} \frac{1}{(mgp_F)^2}\, e^{\Delta_0/T}, & T \to 0, \\ \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{\mu_F}{T_c}\right)^3 (1 - T/T_c)^{-3/2}, & T \to T_c - 0, \end{cases} \qquad (12)$$

где u_2 – скорость второго звука, c_V – удельная теплоемкость. Эксперименты /10/ подтверждают температурную зависимость (9) сдвиговой вязкости в обоих предельных случаях.

Авторы искренне признательны Г. Ф. Жаркову за неизменный интерес к работе и обсуждение результатов.

Поступила в редакцию
22 июня 1983 г.

Литература

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592 (1941).
2. И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, "Наука", М., 1971 г.
3. Н. Н. Боголюбов, Препринт ОИЯИ, Р-1395, Дубна, 1963 г.
4. В. С. Шумейко, ЖЭТФ, 63, 621 (1972).
5. В. П. Галайко, ЖЭТФ, 61, 382 (1971).
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 41, 828 (1961).
7. В. Г. Валеев, Ю. А. Кухаренко, Препринт ФИАН № 111, М., 1983 г.
8. C. P. Enz, Rev. Mod. Phys., 46, N 4, 705 (1974).
9. U. N. Ovchinnikov, J. Low Temp. Phys., 31, 785 (1978).
10. T. A. Alvesalo et al., J. Low Temp. Phys., 19, 1 (1974).