Краткие сообщения по физике № 3-1985 г.

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СОБОЛЕВСКОГО КЛАССА

М.А. Соловьев

УДК 534.2

Доказано, что группа калибровочных преобразований любого соболевского класса действует на соответствующем пространстве полей непрерывно и собственно. Если она не образует группу Ли и является лишь топологической, то это пространство не относится к соболевскому типу, за исключением двух граничных случаев.

Одна из возможностей эффективного выхода за рамки теории возмущений в неабелевой теории поля связана с изучением геометрии пространства орбит, порождаемых действием группы калибровочных преобразований. Ее принципиальное отличие от плоской геометрии абелевой теории установлено Зингером /1/ при анализе грибовских неоднозначностей /2/. В структуре расслоения на орбиты важную роль играет то /3/, что группа калибровочных преобразований действует в пространстве полей собственно. В /3/ это свойство установлено для $SU(2)$-теории на сфере S^3 при дополнительном ограничении на функциональный класс преобразований, который в калибровочной теории всегда считается соболевским. Предполагалась непрерывная зависимость преобразований от точки. При этом условии образуемая ими группа оказывается группой Ли /4/. Однако в теории поля встречаются и калибровочные преобразования, не являющиеся непрерывными, теория которых практически не развита.

В данной работе рассматриваются калибровочные преобразования произвольного соболевского класса и показано, что образуемая ими группа всегда, даже не являясь группой Ли, действует в соответствующем пространстве полей непрерывно и собственно. Доказательство основано на использовании теоремы Реллиха и неравенств Гальярдо – Ниренберга. Калибровочная группа любая компактная, но для наглядности реализуется как подгруппа $SU(N)$. Областью задания поля считаем евклидово пространство R^n. При его компактификации результат и схема доказательства остаются в силе.

Обозначения. $M(N, C)$ – пространство матриц $N \times N$ со скалярным произведением $\mathrm{tr}\, ab^+$; G – калибровочная группа, Λ – ее алгебра Ли; $\|\cdot\|_{p,U}$ –

лебегова норма на открытом множестве U, при $U = R^n$ индекс U опускается; например, для производных калибровочного преобразования

$$\|g^{(k)}\|_p = \left\{\int |g^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

где $|g^{(k)}|^2 = \sum\limits_{|\kappa|=k} \mathrm{tr} D^\kappa g D^\kappa g^+$; κ — мультииндекс частной производной; $|\kappa| = \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$; $\|\cdot\|_\infty = \mathrm{ess\,sup}\,|\cdot|$ — существенная верхняя грань.

Все функции предполагаются локально суммируемыми. Соболевское пространство L^p_q $(1 \leqslant p < \infty,\ q = 0, 1, \ldots)$ состоит из элементов, имеющих слабые p-интегрируемые производные вплоть до порядка q. При q = 0 оно совпадает с лебеговым L^p. Из-за неинтегрируемости калибровочных преобразований на бесконечности используем еще один класс пространств $\hat{L}^p_q$ $(1 \leqslant p < \infty$, $q = 1, 2, \ldots)$, состоящих из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\,|x|<1} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} \|f^{(k)}\|_p. \tag{1}$$

Несмотря на то, что здесь участвует единичный шар, сходимость в $\hat{L}^p_q$ влечет сходимость по норме $\|\cdot\|_{p,|x|<R}$ при любом $R < \infty$ (/5/, стр. 128).

Определение 1. Калибровочными преобразованиями (p, q)-класса назовем функции из $\hat{L}^p_q$ (R^n, M), принимающие почти всюду значения в G. Их множество обозначим через $\mathcal{L}^p_q$ и снабдим индуцированной топологией.

Можно показать, что $\mathcal{L}^p_q$ является топологической группой при любых p, q, а при $p < n < pq$ является группой Ли.

Определение 2. Через $\mathcal{L}^p_{q-1}$ обозначим пространство калибровочных полей $L^{pq}(R^n, \Lambda) \cap L^p_{q-1}(R^n, \Lambda)$, снабженное нормой

$$\|A\|_{pq} + \|A\|_p + \sum_{1 \leqslant k \leqslant q-1} \|A^{(k)}\|_p. \tag{2}$$

В силу теоремы Соболева /5/ при $n \leqslant pq$ имеет место вложение $L^p_{q-1} \subset L^{pq}$. Поэтому при $n \leqslant pq$ (и при q = 1) $\mathcal{L}^p_{q-1}$ совпадает с соболевским L^p_{q-1}. Особо отметим случай n = pq. В /6/ ему уделяется внимание как граничному для области $n < pq$, где $\mathcal{L}^p_q$ является группой Ли в случае компактной базы. В области параметров $1 < q < n/p$ группа $\mathcal{L}^p_q$ выводит из L^p_{q-1}, а адекватным пространством служит $\mathcal{L}^p_{q-1}$. Это диктуется неравенствами /5/ Гальярдо — Ниренберга

$$\|g^{(k)}\|_r \leqslant C\,\|g\|_s^{1-k/q}\,\|g^{(q)}\|_p^{k/q} \quad \left(\frac{q}{r} = \frac{q-k}{s} + \frac{k}{p}\right), \tag{3}$$

$$\|A^{(k)}\|_r \leqslant C\ \|A\|_s^{1-k/(q-1)}\quad \|A^{(q-1)}\|_p^{k/(q-1)} \qquad \left(\frac{q-1}{r} = \frac{q-1-k}{s} + \frac{k}{p}\right). \quad (4)$$

Поскольку $\|g\|_\infty = \sqrt{N}$, из (3) следует $g^{(k)} \in L^{pq/k}$, а (4) при $s = pq$ дает $A^{(k)} \in L^{pq/(k+1)}$. Поэтому дополнительное условие $\|A\|_{pq} < \infty$ обеспечивает те же свойства интегрируемости для производных $A \in L^p_{q-1}$, которыми обладают производные $g^+\partial_\mu g$, $g \in \mathfrak{L}^p_q$. При $r = s = p$ неравенства (4) показывают, что норма (2) эквивалентна норме $\|A\|_{pq} + \|A\|_p + \|A^{(q-1)}\|_p$, а норма (1) эквивалентна $\|f\|_{p,|x|<1} + \|f'\|_p + \|f^{(q)}\|_p$.

Лемма. Пусть f_i – равномерно существенно ограниченная последовательность локально суммируемых функций, для которой $\|f_i\|_{p,|x|<R} \to 0$ при любом R. Тогда последовательность f_iF, где F – элемент какого-либо $L^r (1 \leqslant r < \infty)$, сходится в L^r к нулю.

Доказательство. Введем множество $m_{i,\epsilon,R} = \{x: |x| < R,\ |f_i(x)| > \epsilon\}$. Оно измеримо, и его мера стремится к нулю при $i \to \infty$, поскольку $\epsilon^p \operatorname{mes}\ m_{i,\epsilon,R} \leqslant \|f_i\|^p_{p,|x|<R}$. Разобьем интеграл, представляющий $\|f_iF\|^r_r$, на три: по множеству $|x| \geqslant R$, по множеству $m_{i,\epsilon,R}$ и по их дополнению. Первый интеграл оценивается величиной $\|f_i\|^r_\infty \int\limits_{|x|\geqslant R} |F|^r dx$ и сколь угодно мал при $R \to \infty$. Третий не превосходит $\epsilon^r \int |F|^r dx$ и сколь угодно мал при $\epsilon \to 0$. Второй мажорируется величиной $\|f_i\|^r_\infty \int\limits_{m_{i,\epsilon,r}} |F|^r dx$ и стремится к нулю при $i \to \infty$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Замечание. Взяв в качестве F характеристическую функцию шара $|x| < R$, видим, что $\|f_i\|_{r,|x|<R} \to 0$ при любом $1 \leqslant r < \infty$.

Теорема 1. Группа $\mathfrak{L}^p_q$ действует в $\mathcal{L}^p_{q-1}$ непрерывно.

Доказательство. Используем обозначение $A^g_\mu = g^+ A_\mu g + g^+\partial_\mu g$. Необходимо убедиться, что $A_i \to A$, $g_i \to g$ влечет $A_i^{g_i} \to A^g$ в смысле топологии $\mathcal{L}^p_{q-1}$. Покажем, что $A_i g_i \to Ag$ по норме $\|\cdot\|_p$. Имеем

$$A_i g_i - Ag = A(g_i - g) + (A_i - A)(g_i - g) + (A_i - A) g. \quad (5)$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу леммы, второе и третье – в силу оценки $\|(A_i - A)(g_i - g)\|_p \leqslant \|A_i - A\|_p \|g_i - g\|_\infty$. То же самое справедливо для нормы $\|\cdot\|_{pq}$. Перейдем к производным. Достаточно рассмотреть высшую. Представим ее формулой Лейбница, а затем оценим каждый член с помощью неравенств Гельдера и (3)

$$\|D^{\kappa_1} A D^{\kappa_2}(g_i - g)\|_p \leqslant \|D^{\kappa_1} A\|_{pq/(|\kappa_1|+1)} \|D^{\kappa_2}(g_i - g)\|_{pq/|\kappa_2|} \leqslant$$

$$\leqslant C \|D^{\kappa_1} A\|_{pq/(|\kappa_1|+1)} \|g_i - g\|_\infty^{1-|\kappa_2|/q} \|(g_i - g)^{(q)}\|_p^{|\kappa_2|/q},$$

$(|\kappa_1| + |\kappa_2| = q - 1)$. При $\kappa_2 \neq 0$ правая часть стремится к нулю. При $\kappa_2 = 0$ снова пользуемся леммой. Аналогично оцениваются производные остальных слагаемых в (5), но уже без помощи леммы. Итак, $A_i g_i \to Ag$ по норме (2). Как следствие получаем $A_i^{g_i} \to A^g$ в $\mathcal{L}_{q-1}^p$.

Теорема 2. Группа $\pounds_q^p$ действует в $\mathcal{L}_{q-1}^p$ собственно.

Доказательство. Согласно /7/, докажем, что отображение $(A, g) \to (A, A^g)$ замкнуто, и стабилизатор I_A компактен. Пусть $A = \lim A_i$, $B = \lim B_i$, где $B_i = A_i^{g_i}$. Надо показать, что последовательность g_i имеет точку прикосновения $g \in \pounds_q^p$, причем $B = A^g$. Из формулы

$$\partial_\mu g_i = g_i B_\mu^i - A_\mu^i g_i \tag{6}$$

видно, что g_i ограничена в L_1^{pq} $(|x| < R)$ при любом R. Это пространство рефлексивно и, значит, из g_i можно выделить слабо сходящуюся в нем подпоследовательность. Диагональным процессом выделим подпоследовательность, слабо сходящуюся в каждом L_1^{pq} $(|x| < R)$, $R < \infty$. Для нее сохраним обозначение g_i, а предел обозначим через g. Согласно теореме Реллиха (/5/, стр. 418), в $L^{pq}(|x| < R)$ $g_i \to g$ сильно. Но тогда из (6) следует, что $\partial_\mu g_i$ сходится по норме $\|\cdot\|_{pq}$. Действительно, $A_i g_i = (A_i - A) g_i + A g_i$, где $A g_i \to Ag$ по этой норме в силу леммы, а $\|(A_i - A) g_i\|_{pq} \leqslant \|A_i - A\|_{pq} \|g_i\|_\infty$. Предел $\partial_\mu g_i$ служит слабой производной $\partial_\mu g$. Вторая производная $\partial_\nu \partial_\mu g_i$, согласно (6), выражается через слагаемые вида $(\partial_\nu A_\mu^i) g_i$ и $A_\mu^i (\partial_\nu g)$. Первые сходятся по норме $\|\cdot\|_{pq/2}$ в силу (4) и леммы, а вторые – в силу неравенства Гельдера и только что доказанного неравенства. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $D^\kappa g_i$ сходится к $D^\kappa g$ по норме $\|\cdot\|_{pq/|\kappa|}$ при всех $|\kappa| = 1,\ldots,q$, т.е. $g_i \to g$ в $\hat{L}_q^p$. Поскольку $\pounds_q^p$ замкнута в $\hat{L}_q^p$, g является калибровочным преобразованием, а в силу теоремы 1 $B = A^g$. Компактность I_A доказывается так же, поскольку $g_i \in I_A$ означает $\partial_\mu g_i = g_i A_\mu - A_\mu g_i$.

Из вышеизложенного следует, что каждая орбита замкнута в $\mathcal{L}^p_{q-1}$, а пространство орбит $\mathcal{L}^p_{q-1}/\mathcal{L}^p_q$ отделимо при любых p, q. Эта же техника позволяет доказать, что оно является полным и метризуемым.

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за полезное обсуждение.

Поступила в редакцию 5 ноября 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Singer I.M., Comm. Math. Phys., 60, 1 (1978).
2. Gribov V.N., Nucl. Phys., B139, 1 (1978).
3. Narasimhan M.S., Ramadas T.R. Comm. Math. Phys., 67, 121 (1979).
4. Mitter P.K., Viallet C.M. Comm. Math. Phys., 79, 457 (1981).
5. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975.
6. Uhlenbeck K.K. Comm. Math. Phys., 83, 31 (1982).
7. Бурбаки Н. Общая топология, гл. III–VIII, М., Наука, 1969.