

УДК 538.945

О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТОКА НА ДВИЖУЩИЙСЯ ВИХРЬ В ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ

И. В. Кузора, В. П. Силин

Для специальной периодической зависимости тока от времени в виде прямоугольных меняющих свой знак импульсов дано точное решение резистивной модели джозефсоновского перехода с большой критической плотностью тока. Обсуждены возникающие при этом диссипативные потери.

Теория флюксонов в джозефсоновских туннельных переходах представляет собой важный раздел современной нелинейной физики. В последние годы получила определенное развитие теория вихрей Абрикосова-Джозефсона (АД) в переходах со сравнительно большой плотностью критического тока j_c , когда выполнено неравенство [1] $j_c \gg j_0 = \frac{\hbar c^2}{16\pi|e|\lambda^3} \sim 10^4 \lambda^{-3} [A/cm^2]$. Здесь λ – лондоновская длина в микронах, \hbar – постоянная Планка, c – скорость света, e – заряд электрона. При этом особенно результативной оказывается широко применимая недалеко от критической температуры резистивная модель, в которой емкость единицы площади перехода C_s оказывается достаточно малой [2]: $C_s \ll \phi_0/2\pi c j_c R_s^2$, где R_s – сопротивление единицы площади туннельного перехода, $\phi_0 = \pi \hbar c / |e| = 2,05 \cdot 10^{-7} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ – квант магнитного потока. В таких условиях для разности фаз φ волновых функций куперовских пар по разные стороны перехода может быть использовано следующее интегродифференциальное уравнение (см., напр., [3]):

$$t_0 \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = \frac{l}{\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{dz'}{z' - z} \frac{\partial \varphi(z', t)}{\partial z'} - \sin \varphi + \gamma, \quad (1)$$

где $t_0 = \phi_0/2\pi c R_s j_c$ – релаксационное время, $l = c\phi_0/16\pi^2 \lambda^2 j_c$ – характерный размер вихрей АД, $\gamma(t) = j(t)/j_c$ – безразмерный ток закоротки перехода. Интегральный оператор

в уравнении (1) отвечает преобразованию Гильберта. Во всех ограниченных выражениях принимается $N = \infty$. В оценках, во всяком случае, $N \gg l$.

В работе [4] было получено стационарное решение этого уравнения, описывающее покоящийся уединенный вихрь. Для нас полезен результат работы [5]

$$\varphi(z, t) = \Theta(t) + \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{z - z_0(t)}{\rho(t)} \right], \quad (2)$$

описывающий бегущий под действием тока закоротки уединенный вихрь АД. Подстановка (2) в (1) при использовании соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(y-x)} = \frac{\pi y}{1+y^2}$$

приводит, согласно [5], к системе уравнений

$$\dot{\Theta} + \sin \Theta = \gamma(t), \quad (3)$$

$$\dot{\rho} + \rho \cos \Theta = l, \quad (4)$$

$$\dot{z} + \rho \sin \Theta = 0. \quad (5)$$

Здесь точка означает производную по безразмерному времени $\tau = t/t_0$.

На основе соотношений (2) – (5) в работе [5] было рассмотрено воздействие на вихрь АД постоянного во времени тока закоротки и тока, меняющегося во времени по гармоническому закону с частотой ω . В первом случае рассмотрение было точным, а в случае периодического тока было получено лишь приближенное описание.

В настоящем сообщении излагаются в резистивном приближении (1) результаты точного решения для нелинейного поведения вихря АД под действием периодического тока закоротки, изменяющегося по закону

$$\gamma(t) = (-1)^n \gamma_0 \equiv \gamma_n, \quad \frac{nT}{2} \leq t \leq \frac{n+1}{2}T, \quad (6)$$

(см. рис. 1) с периодом $T = 2\pi/\Omega$, где $\gamma_0 = \text{const}$. Для получения интересующего нас описания полезно, прежде всего, записать решение, отвечающее случаю $\gamma(t) = \text{const}$, подобное использованному в работе [5], но при произвольных начальных условиях:

$$\Theta(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\gamma + [f(\tau, \gamma^2) - 1] \operatorname{tg}[\Theta(\tau = 0)/2]}{1 - \gamma \operatorname{tg}[\Theta(\tau = 0)/2] + f(\tau, \gamma^2)}, \quad (7)$$

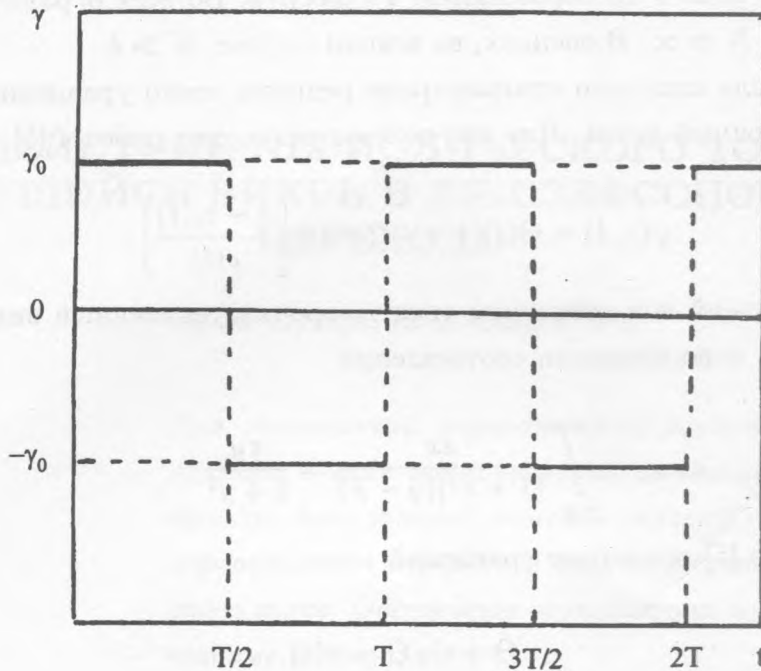


Рис. 1. Прямоугольная форма тока (6), допускающая точное аналитическое решение уравнений (3) - (5).

$$\rho(\tau) = \rho(\tau = 0) \exp\left(-\int_0^\tau d\tau' \cos \Theta(\tau')\right) + l \int_0^\tau d\tau' \exp\left(-\int_{\tau'}^\tau d\tau'' \cos \Theta(\tau'')\right), \quad (8)$$

$$z_0(\tau) = z_0(\tau = 0) - \int_0^\tau d\tau' \sin \Theta(\tau'), \quad (9)$$

где

$$f(\tau, \gamma^2) = \sqrt{1 - \gamma^2} \operatorname{cth}(\sqrt{1 - \gamma^2} \tau / 2). \quad (10)$$

В рассмотренном в работе [5] случае постоянного тока решение (7) релаксирует к значению $\Theta(\tau = \infty) = \arcsin \gamma$. В нашей ситуации нас будет интересовать установившееся решение с периодичностью (6). Для этого прежде всего сошьем два решения вида (7), отвечающих противоположным значениям $\gamma = \gamma_0$ и $\gamma = -\gamma_0$ для соседних полупериодов, и подчиним общее решение условию периодичности. В результате получаем:

$$\Theta(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \xi(\tau), \quad \frac{nT}{2t_0} \leq \tau \leq \frac{(n+1)T}{2t_0}, \quad (11)$$

где

$$\xi(\tau) = \xi_n(\tau) = (-1)^n \frac{\gamma_0 + \xi_0 [f(\tau - nT/2t_0, \gamma_0^2) - 1]}{1 - \gamma_0 \xi_0 + f(\tau - nT/2t_0, \gamma_0^2)}. \quad (12)$$

При этом

$$\xi_0 = \frac{1}{\gamma_0} \{f(T/2t_0, \gamma_0^2) \pm \sqrt{f^2(T/2t_0, \gamma_0^2) + \gamma_0^2}\}. \quad (13)$$

Далее мы ограничимся обсуждением следствий, связанных с решением, отвечающим нижнему знаку формулы (13), которое в пределе $T \gg 2t_0$ близко к стационарному пределу решения (7) $\Theta = \arcsin \gamma$. Следует отметить, что за половину периода $\xi(\tau)$ меняет знак.

Решение уравнения (4) в замкнутой форме можно представить в виде $\rho(\tau) = R(\xi(\tau))$.

При этом:

$$\begin{aligned} R(\xi) = & \frac{1 + \xi_0^2}{1 + \xi^2} \frac{1 + \xi^2 - 2\xi/\gamma(\tau)}{1 + \xi_0^2 - 2\xi_0/\gamma_0} R(\xi_0) + \\ & + \frac{l[1 + \xi^2 - 2\xi/\gamma(\tau)]}{(1 - \gamma^2)(1 + \xi^2)} \left[\frac{2(1 - \xi/\gamma(\tau))}{1 + \xi^2 - 2\xi/\gamma(\tau)} - \frac{2(1 - \xi_0/\gamma_0)}{1 + \xi_0^2 - 2\xi_0/\gamma_0} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \ln \left(\frac{[\gamma(\tau)\xi - 1 + \sqrt{1 - \gamma^2(\tau)}][\gamma_0\xi_0 - 1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}]}{[\gamma(\tau)\xi - 1 - \sqrt{1 - \gamma^2(\tau)}][\gamma_0\xi_0 - 1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}]} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$R(\xi_0) = \frac{l}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x \gamma_0^2}{\operatorname{sh} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \gamma_0^2}}, \quad (15)$$

где $x = \sqrt{1 - \gamma^2}(T/4t_0)$.

Остановимся теперь на зависимости от времени скорости перемещения вихря \dot{z}_0 , для которой, согласно (5), (11), можно записать соотношение:

$$\dot{z}_0 = -\frac{2\xi}{1 + \xi^2} R(\xi). \quad (16)$$

В среднем по периоду скорость перемещения вихря равна нулю. При этом она меняет знак в моменты времени t_n , определяющиеся уравнением

$$f((t_n - nT/2)/t_0, \gamma_0^2) = 1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2} \operatorname{cth} x + \sqrt{(1 - \gamma_0^2) \operatorname{cth}^2 x + \gamma_0^2} \quad (17)$$

и отвечающие обращению в нуль ξ . Поскольку для функции $z_0(\tau) = Z(\xi(\tau))$ уравнение (16) дает

$$\frac{dZ}{d\xi} = -\frac{4\xi R(\xi)}{(1 + \xi^2)[\gamma(1 + \xi^2) - 2\xi]}, \quad (18)$$

то очевидно, что в конце каждого полупериода абсолютная величина скорости достигает максимального значения

$$|\dot{z}_0|_{max} = \frac{\gamma_0 l}{\sqrt{1 - \gamma_0^2}} \frac{\text{sh}x \text{ch}x - \gamma_0^2 x}{\text{ch}^2 x - \gamma_0^2}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь изменение во времени энергии джозефсоновского перехода E , отнесенной к единице поверхности. Прежде всего, отметим, что

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\hbar j_c}{2|e|} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\gamma(t) \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} - t_0 \left(\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (20)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В частности, верхний и нижний пределы отвечают $+N$ и $-N$, которые стремятся к бесконечности. Первое слагаемое под интегралом (20) отвечает мощности тока закортки, передаваемой вихрю, второе – диссипации, обусловленной сопротивлением контакта. Очевидно, что в среднем за период эти два вклада компенсируют друг друга. В этом можно убедиться и непосредственным вычислением.

Определим далее усредненную по периоду передаваемую вихрю мощность тока.

$$Q = \frac{\hbar j_c}{2|e|} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dz \gamma(t) \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t}. \quad (21)$$

Подстановка в правую часть (21) выражения (2) и элементарное интегрирование дает:

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (22)$$

$$Q_1 = -(8j\hbar/|e|T)N \text{arctg} \xi_0, \quad (23)$$

$$Q_2 = (2\pi\hbar j/|e|T)[Z(\xi_0) - Z(-\xi_0)], \quad (24)$$

где j – амплитуда тока в контакте. В пределе $N \rightarrow \infty$ формула (23) отвечает той части передаваемой мощности тока, которая соответствует первому независящему от координат слагаемому правой части формулы (2) и сохраняющемуся в пределе $l = 0$, когда пространственная неоднородность, обусловленная вихрем АД, несущественна.

Используя явное выражение (13), формулу (23) можно представить в следующем виде:

$$Q_1 = N \frac{8\hbar j}{|e|T} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \gamma_0^2} - \sqrt{1 - \gamma_0^2} \operatorname{ch} x}{\gamma_0 \operatorname{sh} x}, \quad (25)$$

где снова $x = \sqrt{1 - \gamma_0^2} (T/4t_0)$.

В пределе малых x , когда

$$x \ll \sqrt{1 - \gamma_0^2} \text{ или } T \ll 4t_0, \quad (26)$$

формула (25) сводится к

$$Q_1 = 2NR_s j^2, \quad (27)$$

что отвечает обычному выражению для омических потерь пространственно однородного тока. В противоположном пределе

$$x \gg 1, \quad (28)$$

формула (25) дает:

$$Q_1 = N \frac{8\hbar j}{|e|T} \operatorname{arctg} \frac{j_c - \sqrt{j_c^2 - j^2}}{j}. \quad (29)$$

Выражение под арктангенсом, вообще говоря, не мало. В пределе $j \ll j_c$ из (29) получаем

$$Q_1 = N \frac{4\hbar j^2}{j_c |e|T} \left(1 + \frac{1}{6} \gamma_0^2 + \dots \right). \quad (30)$$

Выражения (29), (30) не зависят от омического сопротивления, поскольку предел (28) отвечает пределу $t_0 \rightarrow 0$ или, что то же самое, $R_s \rightarrow \infty$. Поэтому Q_1 в (29), (30) определяется сверхпроводящим током через контакт. Отметим, что в [5] вклад Q_1 в мощность работы, совершаемой током, не обсуждался. Подчеркнем, что в пределе $T = \infty$ выражения (29), (30) обращаются в нуль при конечной длине N перехода.

Обратимся теперь к выражению (24). Согласно формуле (18)

$$Z(\xi_0) - Z(-\xi_0) = - \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{d\xi 4\xi R(\xi)}{(1 + \xi^2)[\gamma(1 + \xi^2) - 2\xi]}. \quad (31)$$

Подстановка в правую часть (31) выражения (14) и интегрирование дают:

$$Z(\xi_0) - Z(-\xi_0) = \frac{2\gamma_0 l}{1 - \gamma_0^2} \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \gamma_0^2}}. \quad (32)$$

Это позволяет записать

$$Q_2 = \frac{4\pi \hbar j^2 l}{|e| T j_c (1 - \gamma_0^2)} \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \gamma_0^2}}. \quad (33)$$

В пределе малых x (26) отсюда, в частности, получаем

$$Q_2 = \frac{\pi}{24} l R_s j^2 \left(\frac{T}{t_0} \right)^2, \quad (34)$$

что составляет малую поправку к выражению (27). В противоположном пределе больших x (28) из формулы (33) следует:

$$Q_2 = 2\pi l R_s \frac{j^2}{\sqrt{1 - \gamma_0^2}}, \quad (35)$$

что при $j \ll j_c$ (т.е. $\gamma_0 \ll 1$) отвечает омическим потерям на участке порядка размера вихря АД $\sim 2\pi l$. Из формулы (35) видно, что при $j \rightarrow j_c$ Q_2 возрастает по закону $(j^2 - j_c^2)^{-1/2}$. Это отвечает квазистационарному решению уравнений (3), (4), когда в пределе $T \gg t_0$ пренебрегается производными $\dot{\Theta}$, $\dot{\rho}$. Подобный случай разобран в статье [5] для гармонического тока. Однако детальное рассмотрение показывает, что пренебрежение производными в (3), (4) справедливо лишь при

$$T \gg t_0 \gamma_0 / (1 - \gamma_0^2), \quad (36)$$

что нарушается при $\gamma_0 \rightarrow 1$. Общая формула (33) дает конечные значения Q_2 (при $j \rightarrow j_c$) при больших, но конечных T .

Отношение (35) к (29) имеет вид:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{c^2 R_s T}{64 \lambda^2 N} \frac{j}{\sqrt{j_c^2 - j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{j_c - \sqrt{j_c^2 - j^2}}{j} \right]^{-1}. \quad (37)$$

В формуле (37) множитель, зависящий от j , минимален и равен 2 при $j \ll j_c$. Таким образом, для любых j

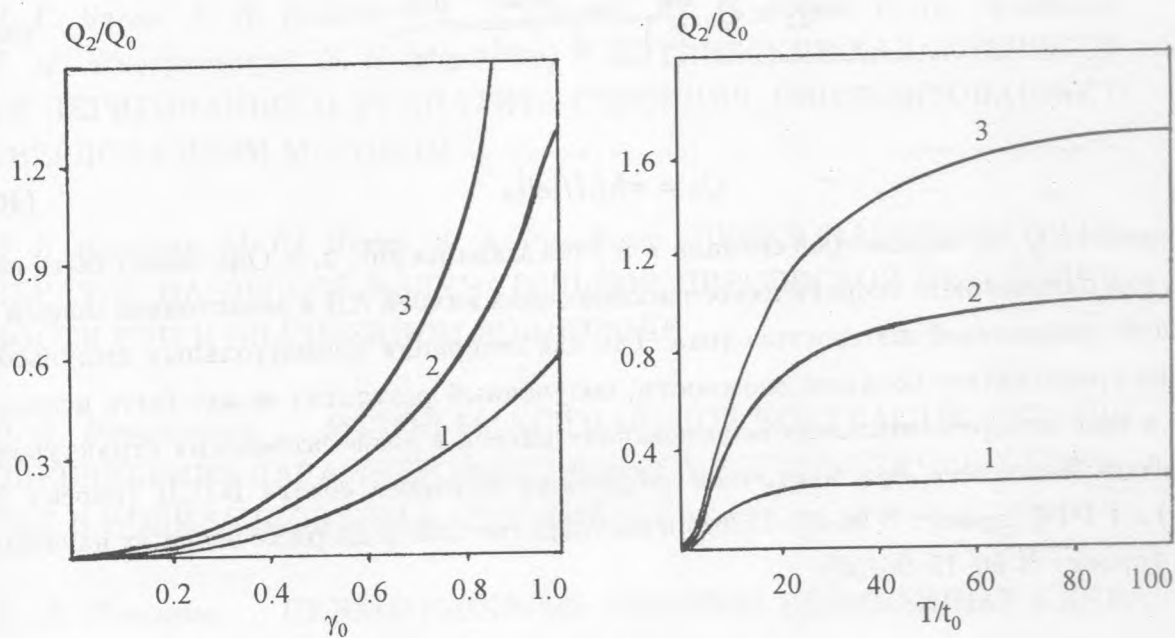


Рис. 2. Зависимость мощности Q_2 , обусловленной диссипацией вихря, от безразмерной амплитуды тока γ_0 (формула (39)) для значений периода тока закоротки $T = 8t_0$ (1), $16t_0$ (2) и $T \rightarrow \infty$ (3).

Рис. 3. Зависимость мощности вихревой диссипации Q_2 от безразмерного периода тока T/t_0 (формула (39)) для $\gamma_0 = 0,5$ (1), $0,8$ (2), $0,9$ (3).

$$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{c^2 R_s T}{32\lambda^2 N}, \quad (38)$$

и для достаточно большого отношения периода T осциллирующего тока к не слишком большой длине $2N$ джозефсоновского перехода потери, определяющиеся передачей мощности тока закоротки пространственно неоднородному вихрю, оказываются основными. Такому случаю соответствует пренебрежение статьи [5] вкладом Q_1 в мощность работы тока.

Итак, при помощи выбора удобной периодической зависимости тока от времени мы описали поведение вихря АД при произвольных периодах сигнала и амплитудах, вплоть

до j_c . Среднепериодическое значение мощности, диссипируемой вихрем в этом случае, описано формулой (33), которую также можно записать в виде:

$$Q_2 = Q_0 \frac{4t_0}{T} \frac{\gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2} \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \gamma_0^2}}, \quad (39)$$

где

$$Q_0 = \pi \hbar j_c l / |e| t_0. \quad (40)$$

Зависимость Q_2 от параметров сигнала T и j показана на рис. 2, 3. Она может быть полезна для дальнейшего теоретического исследования вихрей АД в резистивной модели с большой критической плотностью тока. Так как генерация прямоугольных импульсов тока не представляет большой сложности, полученный результат может быть использован и при экспериментальных исследованиях вихрей в джозефсоновских структурах.

Работа выполнена при частичной поддержке Научного совета ВТСП (проект N 95008) и РФФИ (проект N 96-02-17303) и государственной поддержке ведущих научных школ (проект N 96-15-96750).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aliev Yu. M., Alifimov G. L., Ovchinnikov K. N. et al. *Low Temp. Phys.*, **22** (6), 477 (1996).
- [2] Likharev K. K. *Rev. Mod. Phys.*, **51** (1), 101 (1979).
- [3] Силин В. П. *ЖЭТФ*, **112** (4), 1396 (1997).
- [4] Куприянов М. Ю., Лихарев К. К., Семенов А. К. *Физика низких температур*, **2** (6), 706 (1976).
- [5] Gurevich A. *Physica*, **C243**, 191 (1995).

Поступила в редакцию 2 марта 1998 г.