Краткие сообщения по физике № 2 - 1984 г.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ТИПА ЧИСЛА ЧАСТИЦ В АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

У. Блейер, С. Готлебер, В. П. Фролов

УДК 530.145:530.12:531.51

Получено явное выражение для нелокальных инвариантов безмассового скалярного, электромагнитного и гравитационного классических полей в асимптотически-плоском пространстве, отвечающих числу квантов классической волны. В терминах данных рассеяния классических волн сформулировано условие рождения частиц.

В работе /I/ Я. Б. Зельдович обратил внимание на то, что величина

$$\iint d^3r d^3r' \, |\vec{r} - \vec{r}'|^{-2} [\vec{H}(\vec{r})\vec{H}(\vec{r}') + \vec{E}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}')] \qquad (I)$$

является нелокальным инвариантом в задаче о распространении электромагнитной волны в плоском пространстве. Этот нелокальный инвариант отвечает закону сохранения числа фотонов в данной волне. Цель настоящей работы состоит в получении явного выражения для аналогичных нелокальных инвариантов в асимптотически-плоском пространстве-времени для скалярного безмассового, электромагнитного и гравитационного полей в терминах соответствующих данных рассеяния.

Выведем сначала выражение для искомого нелокального инварианта в общем случае, когда рассматриваемое бозонное поле φ_A $(A = 1, \ldots, N)$ подчиняется уравнению $((\,)_{,\mu} = \partial_\mu(\,))$:

$$D^A[\varphi] \equiv (P^{AB\mu\nu}\varphi_{B,\nu})_{,\mu} - N^{AB\mu}\varphi_{B,\mu} - (T^{AB} + \frac{1}{2} N^{AB\mu}{}_{,\mu})\varphi_B = 0, \quad (2)$$

где $P^{AB\mu\nu} = P^{(AB)(\mu\nu)}$, $N^{AB\mu} = N^{[AB]\mu}$, $T^{AB} = T^{(AB)}$ – произвольные коэффициенты – функции внешнего поля. Каноническая билинейная форма

$$B(\varphi^1,\varphi^2) \equiv \varphi^1 * \varphi^2 \equiv \int_\Sigma (\varphi^2_A P^{AB\mu\nu}\varphi^1_{B,\nu} - \varphi^1_A P^{AB\mu\nu}\varphi^2_{B,\nu} + \varphi^1_A N^{AB\mu}\varphi^2_B)d\sigma_\mu$$

для произвольной пары решений φ^1_A и φ^2_B уравнения (2) не зависит от выбора полной поверхности Коши Σ. Если выбрать в пространстве решений (2) базис $(u^i_A, \bar{u}^i_A)$, нормированный условием $B(u^i, u^j) = 0$, $B(u^i, \bar{u}^j) = i\delta^{ij}$, то оператор поля $\hat{\varphi}_A$, описываемого уравнением (2), записывается следующим образом

$$\hat{\varphi}_A(x) = \sum_i(\hat{b}_i u^i_A(x) + \hat{b}^*_i \bar{u}^i_A(x)),$$

где $\hat{b}^*_i = iB(\bar{u}^i, \hat{\varphi})$ и $\hat{b}_i = - iB(u^i, \hat{\varphi})$ – операторы рождения и уничтожения квантов поля $\hat{\varphi}_A$ в состоянии u^i.

Определим когерентное состояние $|\varphi\rangle$ следующим соотношением:

$$|\varphi\rangle = \exp(- \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i\bar{\varphi}_i + \sum\varphi_i\hat{b}^*_i)|0\rangle,$$

где вакуум $|0\rangle$ определен условием $\hat{b}_i|0\rangle = 0$. Используя свойство нормировки $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$, имеем:

$$Z(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) \equiv \langle 0|\exp(\sum_i\bar{\varphi}_i\hat{b}_i)\exp(\sum_i\varphi_i\hat{b}^*_i)|0\rangle = \exp(\sum_i\varphi_i\bar{\varphi}_i).$$

Среднее значение поля $\hat{\varphi}_A$ в этом состоянии равно

$$\varphi_A(x) \equiv \langle \varphi | \hat{\varphi}_A(x) | \varphi \rangle = \sum_i (u^i_A(x)\delta/\delta\bar{\varphi}_i + \bar{u}^i_A(x)\delta/\delta\varphi_i \times$$

$$\times \ln Z(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) = \sum_i (u^i_A(x)\varphi_i + \bar{u}^i_A(x)\bar{\varphi}_i),$$

то есть когерентное состояние $|\varphi\rangle$ отвечает классической волне с амплитудой $\varphi_A(x)$. Для числа квантов в этой волне имеем

$$N[\varphi] \equiv \langle \varphi | \sum_i \hat{b}^*_i b_i | \varphi \rangle = Z^{-1}(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) \sum_i [(\delta/\delta\bar{\varphi}_i)(\delta/\delta\varphi_i) - 1] Z(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) =$$
$$= \sum_i \bar{\varphi}_i \varphi_i. \qquad (3)$$

Заметим теперь, что $\varphi_i = iB(\bar{u}^i, \varphi)$, поэтому можно переписать (3) в виде

$$N[\varphi] = \sum_i B(\bar{u}^i, \varphi) B(u^i, \varphi) \equiv -\varphi * G^{-} * \varphi, \qquad (4)$$

где $G^{-}_{AB}(x, x') \equiv \langle 0 | \hat{\varphi}_A(x) \hat{\varphi}_B(x') | 0 \rangle = \sum_i u^i_A(x) \bar{u}^i_B(x')$.
Искомый нелокальный функционал $N[\varphi]$ по построению является инвариантом.

В случае, когда рассматривается теория скалярного поля в плоском пространстве, это выражение можно записать в следующей явной форме:

$$N[\varphi] = \frac{m}{4\pi^2} \iint d^3r d^3r' K_1(m|\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\dot{\varphi}(\vec{r})\dot{\varphi}(\vec{r}') + \nabla\varphi(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где m – масса поля. В безмассовом случае получаем выражение, аналогичное (I)

$$N[\varphi] = \frac{1}{4\pi^2} \iint d^3r d^3r' \frac{\dot{\varphi}(\vec{r})\dot{\varphi}(\vec{r}') + \nabla\varphi(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

Инвариант (I) для электромагнитного поля отличается от $N[\varphi]$ лишь численным коэффициентом.

Случай, когда волновое уравнение (2) описывает скалярное безмассовое поле в искривленном асимптотически-плоском пространстве, является частным случаем рассмотренной выше общей задачи. Пусть поле φ, описывающее решение типа волнового пакета, является асимптотически-регулярным и его образ на световой границе будущего $\mathcal{J}^+$ есть Φ. Получим явное выражение для $N[\varphi]$ в терминах данных рассеяния (образа поля на $\mathcal{J}$). С этой целью заметим, что каноническая билинейная форма $B(\varphi^1, \varphi^2) \equiv \int_\Sigma (\varphi^2 \nabla^\mu \varphi^1 - \varphi^1 \nabla^\mu \varphi^2) \sqrt{-g}\, d\sigma_\mu$, связанная с волновым уравнением $(\nabla^\mu \nabla_\mu - \xi R)\varphi = 0$, обладает свойством инвариантности относительно конформных преобразований $g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}, \varphi \to \Omega^{-1}\varphi$. Используя это свойство и выражение $\Phi = (\Omega^{-1}\varphi)|_{\Omega=0}$ для образа на $\mathcal{J}$ поля φ, где Ω – конформный фактор Пенроуза, можно переписать (4) в виде

$$N[\varphi] = \int du d\omega \int du' d\omega' \Phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_u C(x, x') \overleftrightarrow{\partial}_{u'} \Phi(x'), \tag{5}$$

где u – конформное (запаздывающее) время Бонди, $d\omega$ – элемент площади на единичной сфере S^2 и $C(x, x') = \langle 0|\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(x')|0\rangle = -(4\pi)^{-1}\ln(u - u' + i\varepsilon)\delta(\omega, \omega')$ – образ положительно-частотной функции Грина G^- на $\mathcal{J}^+$. Используя условие убывания $|\Phi(u, \vartheta, \varphi)| \to 0$ при $|u| \to \infty$, можно переписать (5) в следующем виде:

$$N_{out}[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} du' \int d\omega \frac{\Phi_{out}(u, \omega)\Phi_{out}(u', \omega)}{(u - u')^2},$$

где интегрирование по u и u' понимается в смысле главного значения. Аналогичный вид, отличающийся лишь заменой Φ_{out} на Φ_{in}, имеет нелокальный инвариант $N_{in}[\varphi]$ для числа ин-квантов скалярного поля.

Приведем без вывода аналогичное выражение для числа фотонов и гравитонов. Пусть m^μ и $\bar{m}^\mu$ – комплексные векторы, растягивающие двумерное сечение $u = \mathrm{const}$ поверхности $\mathcal{J}^\pm$. Можно показать /2/, что существует калибровка, в которой асимптотическирегулярные электромагнитное a_μ и гравитационное $h_{\mu\nu}$ поля имеют на $\mathcal{J}$ вид

$$a_\mu\big|_{\mathcal{J}} = \bar{A}m_\mu + A\bar{m}_\mu; \quad h_{\mu\nu}\big|_{\mathcal{J}} = \bar{A}m_\mu m_\nu + A\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu,$$

где A – комплексная функция на $\mathcal{J}$. Тогда

$$N_{\substack{in\\out}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} du' \int d\omega\,(u - u')^{-2} \times$$

$$\times \left[A_{\substack{in\\out}}(u,\omega)\bar{A}_{\substack{in\\out}}(u',\omega) + \bar{A}_{\substack{in\\out}}(u,\omega)A_{\substack{in\\out}}(u',\omega)\right].$$

Значения in и out отвечают падающей с $\mathcal{J}^-$ и выходящей на $\mathcal{J}^+$ волнам. Отличие N_{in} от N_{out} является удобным критерием, позволяющим с помощью решения классической задачи рассеяния судить о наличии или отсутствии эффектов рождения частиц в асимптотически-плоских гравитационных полях.

Поступила в редакцию
I июля 1983 г.

Литература

I. Я. Б. Зельдович, ДАН СССР, 163, 1359 (1965).

2. V. P. Frolov, Fortschr. Phys., 26, 455 (1978).