Краткие сообщения по физике № 4-1984 г.

АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ААРОНОВА – БОМА

В.Д. Скаржинский

УДК 530.145

Исследуется асимптотика волновой функции рассеяния Ааронова - Бома. Показано, что искажение амплитуды падающей плоской волны в области тени необходимо для непрерывности волновой функции в асимптотической области.

Эффект Ааронова - Бома /1/, вызвавший в 60-х годах бурную дискуссию о роли электромагнитных потенциалов в квантовой физике /2/, по-прежнему продолжает привлекать к себе внимание исследователей /3-8/. Этому способствует не только его тесная связь с актуальными проблемами физики элементарных частиц, такими как проблема магнитных зарядов, но и ряд неточных, а иногда и неверных /9/ утверждений, в частности, об однозначности волновых функций в многосвязной области. В этой связи представляется целесообразным еще раз вернуться к этому вопросу.

Волновая функция, описывающая рассеяние заряженной частицы на сингулярном поле бесконечно длинного тонкого соленоида с вектор-потенциалом

$$A_\phi(\rho) = \Phi/2\pi\rho, \tag{1}$$

где ρ, ϕ – полярные координаты, а Φ – поток магнитного поля вдоль оси oz, может быть записана в виде /1/

$$\Psi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\phi - \phi_p - \pi) - i\ \tfrac{\pi}{2}\ |m - \beta|] J_{|m-\beta|}(p\rho), \tag{2}$$

где $J_\nu(x)$ – функция Бесселя, $\vec{p}$ – волновой вектор в плоскости xy, а параметр $\beta = e\Phi/2\pi\hbar c$.

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя, волновую функцию (2) можно представить в замкнутой форме

$$\Psi(\rho, \phi) = \exp[in(\phi - \phi_p - \pi)]\exp(i\vec{p}\,\vec{\rho})\ \tfrac{1}{2}\sin\pi\delta\Big\{I_{1-\delta}(\zeta, \eta) - \\ - \exp[-i(\phi - \phi_p)]I_\delta(\zeta, \eta)\Big\}, \tag{3}$$

где

$$I_\nu(\zeta, \eta) = \int\limits_0^\zeta dx \exp(-ix\eta)\exp(i\,\frac{\pi}{2}\,\nu) H_\nu^{(1)}(x), \tag{4}$$

$\xi = p\rho$, $\eta = \cos(\phi - \phi_p)$, $\beta = n - \delta$ $(0 \leqslant \delta < 1)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля. Формула (3) определяет волновую функцию, которая непрерывна и дифференцируема по ρ и ϕ всюду, кроме оси oz (вследствие сингулярности вектор-потенциала (1)), а также однозначна и периодична по ϕ. В частности, при $\delta = 0$ имеем

$$\Psi(\rho, \phi) = \exp[in(\phi - \phi_p - \pi)]\exp(i\vec{p}\vec{\rho}), \tag{5}$$

т.е. волновая функция является плоской волной с дополнительным фазовым множителем, который в этом случае полностью компенсирует вклад вектор-потенциала во всех физических величинах, например, в матричных элементах оператора тока.

Итегральное представление (3) удобно для изучения асимптотического поведения волновой функции при $p\rho \gg 1$.

С этой целью интервал интегрирования в выражении (4) разобьем на две части, $(\infty, 0)$ и (ξ, ∞). Соответсвенно, волновая функция (3) запишется в виде суммы

$$\Psi(\rho, \phi) = \Psi_\infty(\rho, \phi) + \Psi_s(\rho, \phi). \tag{6}$$

Первый член вычисляется явно. Используя формулу

$$I_\nu(\infty, \eta) = \frac{2}{\sqrt{1-\eta^2}\sin\pi\nu} \sin[\nu(\frac{\pi}{2} + \arcsin\eta)], \tag{7}$$

получаем

$$\Psi_\infty(\rho, \phi) = \exp[i\beta(\phi - \phi_p - 2\pi m - \pi)]\exp(i\vec{p}\vec{\rho}),$$

$$2\pi m < \phi - \phi_p < 2\pi(m+1).$$

Эта функция периодична по ϕ, но претерпевает разрыв на полуплоскости $\phi = \phi_p + 2\pi m$ за рассеивателем. По этой причине, вопреки многочисленным утверждениям, она не является истинным асимптотическим выражением, так как не удовлетворяет уравнению Шредингера в асимптотической области. Ясно, что соответствующий вклад в асимптотику, ликвидирующий указанный разрыв, должен вносить второй член суммы (6).

Функцию $\Psi_s(\rho, \phi)$ удается вычислить явно лишь в асимптотической области, где можно воспользоваться асимптотическим выражением для функций Ганкеля. В этом случае интегралы (4) по интервалу (ξ, ∞) выражаются через интегралы Френеля $C(\sqrt{\xi(1-\eta)})$ и $S(\sqrt{\xi(1-\eta)})$. Отсюда следует, что функция $\Psi_s(\rho, \phi)$ обладает различным асимптотическим поведением при $\xi = p\rho \gg 1$ в зависимости от значения $\eta = \cos(\phi - \phi_p)$.

Для всех направлений, отличных от направления падающей волны, когда величина $p\rho(1-\eta) \gg 1$, функция $\Psi_s(\rho, \phi)$ описывает расходящуюся цилиндрическую волну, так что волновая функция представляет собой стационарную волну рассеяния

$$\Psi(\rho, \phi) \sim \exp[i\beta(\phi - \phi_p - 2\pi m - \pi)]\left\{\exp(i\vec{p}\vec{\rho}) + f(\phi)\frac{1}{\sqrt{\rho}}\exp(ip\rho)\right\}, \tag{8}$$

где амплитуда рассеяния

$$f(\phi) = \exp[i(\delta - 1/2)(\phi - \phi_p - 2\pi m - \pi) - i3\pi/4]\,\frac{1}{\sqrt{2\pi p}}\,\frac{\sin\pi\delta}{\sin[(\phi - \phi_p - 2\pi m)/2]}. \tag{9}$$

Эти выражения справедливы лишь в области углов $2\pi m + \epsilon < \phi - \phi_p < 2\pi(m+1) - \epsilon$. Для рассеяния вперед, когда $p\rho \gg 1$, но $p\rho(1-\eta) \ll 1$, находим

$$\Psi_s(\rho, \phi) \sim \Psi_s^\infty(\rho, \phi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(in\pi + i\pi/4)\exp(ip\rho)\sin\pi\delta\Big[2\gamma\sqrt{2p\rho(1-\eta)} - \frac{1-2\delta}{\sqrt{p\rho}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{p\rho}}, \sqrt{p\rho(1-\eta)}\right)\Big], \tag{10}$$

где $\gamma = \pm 1$ соответсвенно для значений углов $2\pi m < \phi - \phi_p \leqslant 2\pi m + \epsilon$ и $2\pi(m+1) - \epsilon \leqslant \phi - \phi_p < 2\pi(m+1)$, а асимптотически не убывающий член

$$\Psi_s^\infty(\rho, \phi) = -i\gamma\exp(in\pi)\exp(ip\rho)\sin\pi\delta \tag{11}$$

на полуплоскости $\phi = \phi_p + 2\pi m$ терпит разрыв, компенсирующий разрыв функции $\Psi_\infty(\rho, \phi)$. Таким образом, при $p\rho \gg 1$, $p\rho(1-\eta) \ll 1$ волновая функция (3) имеет следующее асимптотическое выражение:

$$\Psi(\rho, \phi) \sim \exp(in\pi)\exp(ip\rho)\left\{\cos\pi\delta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\pi/4)\sin\pi\delta\left[2\gamma\sqrt{2p\rho(1-\eta)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-2\delta}{\sqrt{p\rho}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{p\rho}}, \sqrt{p\rho(1-\eta)}\right)\right]\right\}, \qquad (12)$$

$$2\pi m \leqslant \phi - \phi_p \leqslant 2\pi m + \epsilon;\ \ 2\pi(m+1) - \epsilon \leqslant \phi - \phi_p \leqslant 2\pi(m+1).$$

В целом, во всей области углов асимптотическое выражение для волновой функции (3) при $p\rho \gg 1$ является непрерывной периодической функцией угла ϕ. Однако в окресности параболы $\rho - \rho\cos(\phi - \phi_p) \sim 1/p$ происходит перестройка асимптотики волновой функции, так что в одной области углов она описывается формулой (8), а в другой (в направлении падающей волны) – формулой (12). Эта перестройка необходима для того, чтобы согласовать требование непрерывности по ϕ с асимптотическим поведением типа (8) в широком диапазоне углов, которое диктуется условием рассеяния и слабым убыванием вектор-потенциала (1) в асимптотической области.

Формула (12) показывает, что в области за рассеивателем амплитуда падающей волны при $p\rho \gg 1$ ослабляется в $\cos\pi\delta$ раз (область тени). Этот эффект оказывается особенно заметным для случая полуцелых значений параметра β, когда $\cos\pi\delta = 0$. Для таких значений β волновую функцию удается найти в явном виде /1/

$$\Psi(\rho, \phi) = \exp[i(n - 1/2)(\phi - \phi_p - 2\pi m - \pi)]\exp(i\vec{p}\vec{\rho})\sqrt{2}\exp(-i\pi/4)\ \times$$

$$\times \left\{C[\sqrt{p\rho(1-\eta)}] + iS[\sqrt{p\rho(1-\eta)}]\right\} \qquad (13)$$

Волновая фукция (13) обращается в нуль в области за рассеивателем для всех значений ρ, $\Psi(\rho, \phi_p + 2\pi m) = 0$.

Поступила в редакцию 13 октября 1983 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev., 115, 485 (1959).

2. Е.Л. Фейнберг, УФН, ЕХХУШ, вып. 1, 53 (1962).
3. H.J. Rothe, Nuovo Cimento, 62A , 54 (1981).
4. M. Peshkin, Phys. Repts., 80 , 376 (1981).
5. K. Kawamura et al., Prog. Theor. Phys., 67 , 1263 (1982).
6. S. Olariu, I.I. Popescu, Phys. Rev., D27, 383 (1983).
7. V.P. Frolov, V.D. Skarzhinsky, Nuovo Cimento, 76B , 35 (1983).
8. T. Takabayashi et al., Prog. Theor. Phys., 69 , 1323 (1983).
9. P. Bocchieri et al., Nuovo Cimento 47A , 475 (1978); 51A, 1 (1979); 56A, 55; 59A , 121 (1980); 60A , 164 (1981); Lett. Nuovo Cimento, 35 , 370,469 (1983).