Краткие сообщения по физике № 4-1984 г.

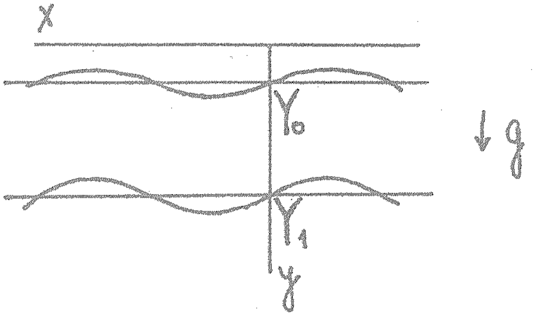
РАЗВИТАЯ РЕЛЕЙ–ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С.А. Старцев

УДК 532.517.2

Аналитически получены четыре члена разложения по малому параметру kA для Релей-Тейлоровской неустойчивости слоя идеальной жидкости в лагранжевых координатах. Проведено сравнение с результатами численных расчетов.

Описание жидкостей в лагранжевых координатах (л.к.) является одним из способов введения переменных в гидродинамике /1/. В последнее время л.к. используются для решения различных задач движения жидкости /2/, в том числе и для описания Релей-Тейлоровской (РТ) неустойчивости /3,4/. В препринте /5/ сформулирован общий подход к решению задачи о РТ неустойчивости слоя идеальной жидкости путем разложения по малой амплитуде возмущения $A \ll 1/k$ (k – волновое число первоначально синусоидального по оси x возмущения (рис.1), Y_0 и Y_1 – л.к. границ поля). Как показано в /5/ при временах $t \gg 1/\sigma$, где $\sigma = \sqrt{kg}$, первый член разложения выходит на асимптотическое, но все еще малое по величине решение $\sim \exp(\sigma t)$. При тех же временах следующие члены разложения также выходят на асимптотическое решение $\sim \exp(n\sigma t)$, где n – номер члена.



Р и с. 1. Первоначальная форма слоя

Поэтому для развитой неустойчивости будем рассматривать только асимптотическое решение

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x_0, y_0)\exp(n\sigma t),$$

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_0, y_0)\exp(n\sigma t), \tag{1}$$

$$P/\rho = gy_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x_0, y_0)\exp(n\sigma t).$$

Разлагая теперь y_n, x_n, P_n в ряд Фурье по x_0 и предполагая /5/, что $y_1 \sim$ $\sim \cos kx_0$, $x_1 \sim \sin kx_0$ и $P_1 \sim \cos kx_0$, получим уравнения на коэффициенты Фурье во всех порядках n:

$$n^2\sigma^2\delta_n^j - jk[\lambda_n^j - g\alpha_n^j] = f_n^j,$$

$$n^2\sigma^2\alpha_n^j + \frac{d\lambda_n^j}{dy_0} + gjk\delta_n^j = q_n^j, \tag{2}$$

$$jk\delta_n^j + \frac{d\alpha_n^j}{dy_0} = s_n^j.$$

Здесь α_n^j, δ_n^j, λ_n^j j-тые коэффициенты Фурье для y_n, x_n и P_n соответственно, f_n^j, q_n^j, s_n^j – функций, зависяшие от α_l^j, δ_l^j, λ_l^j ($l = 0, 1, ..., n-1$), определенных на более ранней стадии вычислений, $f_1 = q_1 = s_1 = 0$. /5/.

Граничные условия выбирались из предположения, что величины давления при Y_0 и Y_1 в окружающей слой среде постоянны во времени, т.е. $\lambda_n^j(Y_i, t) =$ $= 0$. Мы получили четыре члена ряда по kA для таких граничных условий и начальных условий $\alpha_1^1(Y_1) = A$. Выберем в дальнейшем $Y_1 = 0$ и обозначим $z = kA\exp(\sigma t)$, $\Theta = \exp(ky_0)$, $\Theta_0 = \exp(kY_0)$. Тогда решение выглядит следующим образом:

$$ky = ky_0 + z\Theta\cos kx_0 + (z^2/2)[\Theta^2 + (1-\Theta_0^2)/2kY_0] + z^3\cos kx_0\left\{\frac{\Theta^3}{3} - \Theta \times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{5}{24}(1+\Theta_0^2) + \frac{1-\Theta_0^2}{8kY_0}\right] - \frac{\Theta_0^2}{6\Theta}\right\} + z^4\left\{\frac{\Theta^4}{6} - \Theta^2\left[\frac{5}{24}(1+\Theta_0^2) + \frac{1-\Theta_0^2}{8kY_0}\right] - \right.$$

$$
-\frac{1}{16}\left[\frac{1-\Theta_0^4}{kY_0}+\left(\frac{1-\Theta_0^2}{kY_0}\right)^2\right]\Bigg\}+z^4\cos 2kx_0\left\{\frac{\Theta^4}{12}-\frac{3}{28}\Theta^2\frac{(\Theta_0^2-1)^2}{\Theta_0^2+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{3}\frac{\Theta_0^4\Theta^{-2}}{\Theta_0^2+1}+\frac{\Theta_0^2}{12}\right\}, \tag{3}
$$

$$
kx=kx_0-z\Theta\sin kx_0+z^3\sin kx_0\left\{\Theta\left[\frac{5}{24}(1+\Theta_0^2)+\frac{1-\Theta_0^2}{8kY_0}\right]-\frac{\Theta_0^2}{6\Theta}\right\}+
$$

$$
+z^4\left\{\frac{3}{28}\frac{(\Theta_0^2-1)^2}{\Theta_0^2+1}-\frac{1}{3}\frac{\Theta_0^4\Theta^{-2}}{\Theta_0^2+1}+\frac{\Theta_0^2}{6}\right\}\sin 2kx_0, \tag{4}
$$

$$
-\frac{kP}{\rho g}=ky_0+z^2\left(1-\Theta^2-\frac{1-\Theta_0^2}{kY_0}ky_0\right)+\frac{5}{3}z^3\cos kx_0\frac{(1-\Theta^2)(\Theta^2-\Theta_0^2)}{\Theta}+
$$

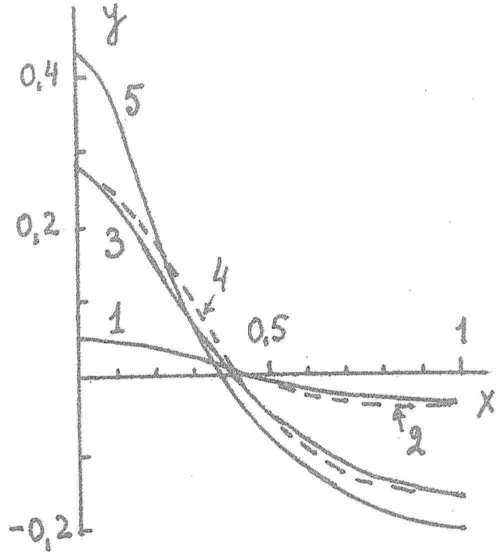
$$
+z^4\left\{\frac{3}{2}(1-\Theta^4)+(\Theta^2-1)\left[\frac{5}{2}(1+\Theta_0^2)+\frac{1-\Theta_0^2}{kY_0}\right]+\frac{ky_0}{kY_0}\left[1-\Theta_0^4+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{(1-\Theta_0^2)^2}{kY_0}\right]\right\}+z^4\cos 2kx_0\frac{(1-\Theta^2)(\Theta^2-\Theta_0^2)}{4\Theta^2(1+\Theta_0^2)}\times \tag{5}
$$

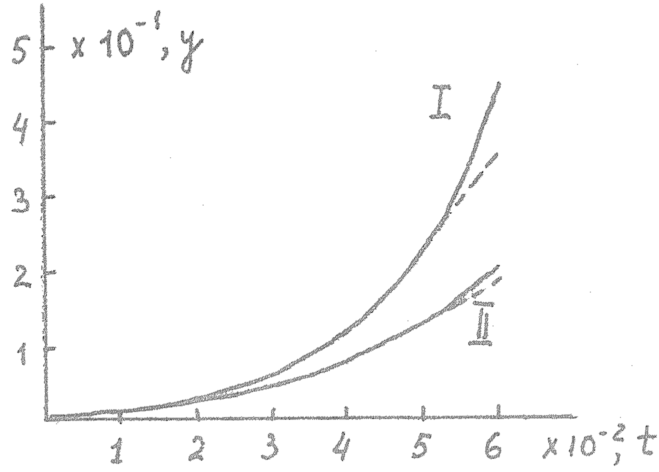
$$
\times\left[3\Theta^2(\Theta_0^2+1)+12\Theta_0^2\right].
$$

Таким образом, координаты соответствующих лагранжевых точек (x_0, y_0) и давление в них представляются в виде ряда по z. Хорошо известно, что для степенного ряда радиус круга сходимости равен расстоянию от $z = 0$ до первой особой точки исследуемой функции. Положение особых точек функций (3) – (5) исследовалось при помощи паде-аппроксимации соответствующих рядов. Радиус сходимости оказался ~ 0,9. Можно, следовательно, предположить, что ряды (3) – (5) описывают решение вплоть до $z \cong 0{,}9$.

Результаты наших расчетов формы поверхности жидкости по формулам (3) – (5) $(k = \pi)$ для полубесконечного слоя жидкости приведены на рис.2 и на рис. 3. Для сравнения на тех же рисунках приведены результаты численных расчетов РТ неустойчивости /4/ (пунктир). На рис. 2 кривые построены для величин $z = 0{,}15$ (кривые 1; 2): 0,655 (кривые 3; 4) и 0,9 (кривая 5).



Р и с. 2. Форма поверхности жидкости при различных z. Пунктиром показаны результаты численных расчетов /4/



Р и с. 3. Зависимость от времени координат "пиков" (I) и "пузырьков" (II). Пунктиром показаны результаты работы /4/

На рис. 3 приведены зависимости координат "пиков" и "пузырьков" от времени (начальное значение $z = 0{,}01 \cdot \pi$). Видно достаточно хорошее согласие наших расчетов с численными вплоть до $z = 0{,}655$ ($t = 5{,}42 \cdot 10^{-2}$ на рис.3).

Таким образом, в данной работе показано, что для описания РТ неустойчивости слоя идеальной жидкости вплоть до $z = 0{,}655$ достаточно взять несколько членов в разложении в ряд по z величин kx, ky и $kP/\rho g$.

Автор считает своим долгом поблагодарить за полезные обсуждения Е.Г. Гамалия, О.Н. Крохина и Ю.А. Меркульева.

Поступила в редакцию 1 октября 1983 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Часть I, ГИТТИ, М., 1955 г.
2. Я.И. Секерж-Зенькович, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 15, 57 (1951).
3. E. Ott, Phys. Rev. Lett., 29, 1429 (1972).
4. В.А. Гасилов, В.М. Головизнин и др., Препринт ИМП АН СССР, № 70, 1979 г.
5. С.А. Старцев, Препринт ФИАН № 158, 1982 г.