Краткие сообщения по физике № 5-1984 г.

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ФОРМУЛ МИ НА ЭВМ

Ю.А. Ильин, С.А. Старцев

УДК 535.36

Предложен метод вычисления функций $A_n(y)$, входящих в формулы коэффициентов Ми, улучшающий точность результатов расчетов при больших радиусах и больших поглощениях сферической частицы.

Формулы Ми используются при расчетах рассеяния света на сферической частице с радиусом r и показателем преломления $m = \nu - i\kappa$, где величина κ учитывает поглощение.

Для вычисления функций $A_n(y)$, входящих в формулы коэффициентов Ми, обычно применяется следующая рекуррентная формула /1/:

$$A_n(y) = -\frac{n}{y} + \left[\frac{n}{y} - A_{n-1}(y)\right]^{-1}, \quad A_0(y) = \mathrm{ctg}\, y. \tag{1}$$

Здесь $y = mx$, $x = kr$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число в свободном пространстве.

При вычислениях на ЭВМ по формуле (1) коэффициентов A_n для сферических частиц большого размера или обладающих большим поглощением могут получаться физически неприемлемые результаты. Это объясняется тем, что на каждом шагу вычислений происходит уменьшение точности получаемых значений A_n и, в конце концов, при некотором номере n ошибки превышают сами значения функций.

Существует, однако, простой способ избавиться от этих ошибок. Для этого зафиксируем значение y и перейдем к очень большому номеру n. Тогда функция A_n представима следующим рядом

$$A_n(y) = \frac{n+1}{y} - \frac{y}{2n+3} - \ldots . \tag{2}$$

Этот результат верен для

$$|y| \ll \sqrt{(2n+3)(n+1)} \cong n\sqrt{2}. \qquad (3)$$

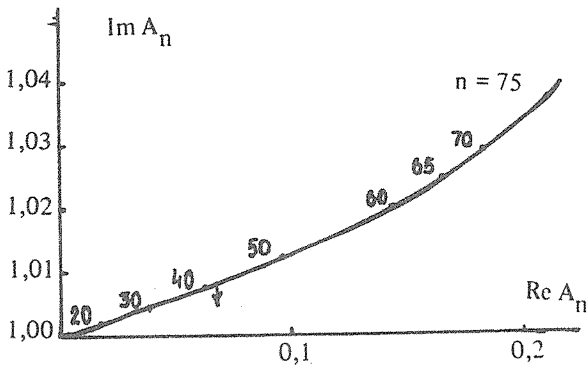
Взяв за основу формулу (2), поступим следующим образом. При некотором большом номере n положим $A_n(y) = (n+1)/y$ и подставим эту величину в рекуррентную формулу, обратную (1):

$$A_{n-1}(y) = \frac{n}{y} - \left[\frac{n}{y} + A_n(y)\right]^{-1}. \qquad (4)$$

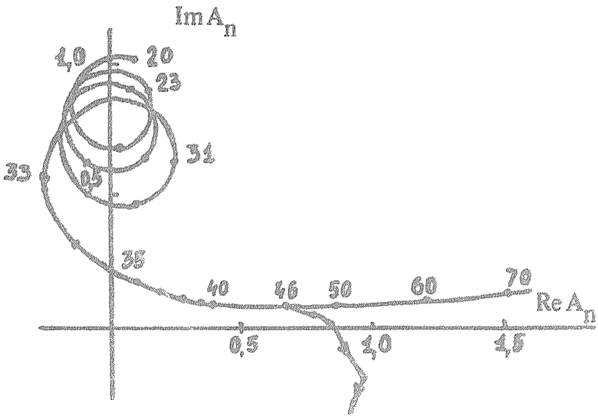
Вычисление коэффициентов $A_n(y)$ по формуле (4) идет от больших номеров n к малым. В этом случае не происходит накопления ошибок, присущих алгоритму (1), и таким образом снимаются все ограничения на размер и величину поглощения сферической частицы. Как показывают расчеты на ЭВМ, формула (4) позволяет вычислить все A_k для $k \ll n$, причем значения A_k при малых k с хорошей точностью совпадают с результатами расчетов по формуле (1).

На рис. 1-3 приведены результаты расчетов по нашему алгоритму и по формуле (1). Стрелками указаны места срывов вычислений по формуле (1). Наши рисунки соответствуют рисункам 1-3 из книги /1/.

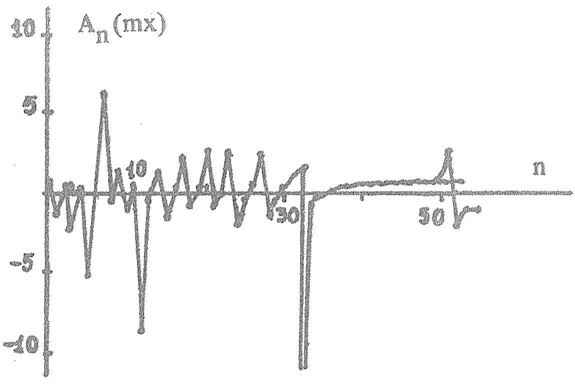
Необходимо также заметить, что последовательное применение формулы (4) фактически приводит к представлению функций $A_n(y)$ в виде непрерывной дроби /2/.



Р и с. 1 Комплексная функция $A_n(y)$ для больших сферических частиц $m = 1{,}28 - 1{,}37i$; $x = 62$



Р и с. 2 Диэлектрические сферические частицы с умеренным поглощением $m = 1{,}29 - 0{,}0472i$; $x = 30$



Р и с. 3 Вещественная функция $A_n(y)$ для непоглощающих сфер ($m = 1{,}29$)

Известный в литературе метод прогонки при вычислении функций Рикатти – Бесселя ψ_n /3/ предполагает рекуррентное вычисление четырех рядов коэффициентов, затем нахождение через них самих функций ψ_n и только затем функций $A_n(y)$. Как видно из вышеизложенного, наш метод предполагает непосредственное вычисление $A_n(y)$, которые ответственны за точность расчетов по формулам Ми.

Поступила в редакцию 24 ноября 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Дейрменджан, Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами, "Мир", М., 1971 г.
2. Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике, "Наука", М., 1968 г., с. 136.
3. И.М. Зельманович, К.С. Шифрин, Таблицы по светорассеянию, т. 3, ГИМИЗ, Л., 1968 г., с. 8-10.