УДК 530.1

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ТРЕНИЕМ: СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ С ГАМИЛЬТОНИАНОМ И КИНЕТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

В. И. Манько, С. С. Сафонов

В явном виде получены решения нового кинетического уравнения квантовой механики для возбужденных состояний осциллятора с трением. Проанализирована разница между распределениями вероятностей координаты, определяющими состояния в новой формулировке квантовой механики, для осциллятора с трением в рамках модели с гамильтонианом Калдирола–Канаи и кинетического уравнения со столкновительным членом.

Проблема движения с трением занимает особое место в квантовой механике. В рамках квантовой теории для описания диссипативных квантовых систем были предложены различные модели. Простой квантовый гамильтониан, который описывает трение в рамках линейного уравнения Шредингера для волновой функции, был предложен и более подробно рассмотрен в [1, 2]. Для открытых (диссипативных) квантовых систем было предложено кинетическое уравнение с коэффициентами, которые описывают трение (см., напр., [3, 4]). Однако до сих пор существует неясность в сравнительном анализе различных моделей квантового трения по сравнению с классическим трением. Попытки сравнить различные модели, которые описывают квантовые системы с трением, были сделаны во многих работах (см., напр., [5], в которой была приведена зависимость от времени усредненной по периоду энергии затухающего осциллятора в классическом и квантовом случаях), но эти попытки не дали окончательного понимания проблемы.

В [6, 7, 8] было введено вероятностное представление в квантовой механике и получено новое уравнение эволюции, являющееся обобщением результата работы [9], в котором роль функции Вигнера играет распределение вероятности (маргинальное распределение) координаты частицы в ансамбле повернутых с изменением масштаба систем отсчета в фазовом пространстве системы (классическое представление квантовой механики).

В рамках этого классического представления в [10] был рассмотрен квантовый осциллятор с трением, который описывался моделью Калдирола–Канаи. Принимая во внимание возможность "классического" описания квантовой системы, мы сравним две различные модели с квантовым трением: модель Калдирола–Канаи с гамильтонианом и модель, в которой трение описывается кинетическим уравнением со столкновительным членом.

Цель настоящей работы – получить маргинальное распределение для квантового осциллятора с трением, используя модель с кинетическим уравнением, и сравнить найденное выражение с маргинальным распределением для системы с гамильтонианом Калдирола–Канаи, которое было получено в [10].

Как было показано в [6], для линейной комбинации координаты в фазовом пространстве q и импульса p, которая является измеримой величиной ($\hbar = m = 1$)

$$\widehat{X} = \mu\widehat{q} + \frac{\nu}{\omega_1}\widehat{p}, \tag{1}$$

где ω_1 – частота невозбужденного осциллятора, маргинальное распределение $w\left(X, \mu, \nu\right)$ связано с состоянием квантовой системы, заданным функцией Вигнера, следующим образом:

$$w\left(X, \mu, \nu\right) = \int \exp\left[-ik\left(X - \mu q - \frac{\nu}{\omega_1}p\right)\right] W\left(q, p\right) \frac{dk\, dq\, dp}{\left(2\pi\right)^2}, \tag{2}$$

где μ и ν – действительные числа. В работе [6] было показано, что для системы с трением, которая описывается с помощью кинетического уравнения для матрицы плотности со столкновительным членом

$$\dot{\rho} = -i\omega_1\left[a^\dagger a, \rho\right] + \gamma_1\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right), \tag{3}$$

где γ_1 – коэффициент трения в модели с кинетическим уравнением, а $a^\dagger, a$ – бозонные операторы рождения и уничтожения, можно переписать данное уравнение (в представлении взаимодействия) на языке маргинального распределения, используя классическое описание квантовой механики, в виде нового уравнения Фоккера–Планка

$$\dot{w} = \gamma_1\left[2 - \frac{\partial}{\partial\nu}\nu - \frac{\partial}{\partial\mu}\mu + \frac{1}{2\omega_1}\left(\mu^2 + \nu^2\right)\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right] w. \tag{4}$$

Решением эволюционного уравнения (4) является маргинальное распределение когерентного состояния системы с трением в представлении взаимодействия [6]

$$w\left(X,\mu,\nu,t\right)=\sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\exp\left\{-\frac{\left[X-\left(\mu q_0+\omega_1^{-1}\nu p_0\right)e^{-\gamma_1 t}\right]^2}{\omega_1^{-1}\left(\mu^2+\nu^2\right)}\right\}, \tag{5}$$

которое связано посредством уравнения (2) с функцией Вигнера гармонического осциллятора с трением

$$W\left(q,p\right)=2\exp\left[-\omega_1\left(q-q_0e^{-\gamma_1 t}\right)^2-\omega_1^{-1}\left(p-p_0e^{-\gamma_1 t}\right)^2\right]. \tag{6}$$

В уравнениях (5) и (6) параметры начального когерентного состояния q_0, p_0 можно записать в виде

$$q_0=\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2\omega_1}},\qquad p_0=\frac{\alpha-\alpha^*}{i\sqrt{2}}\sqrt{\omega_1}, \tag{7}$$

где α – комплексное число. Поскольку уравнение (5) было написано в представлении взаимодействия, то для того, чтобы найти маргинальное распределение для когерентного состояния системы в представлении Шредингера, достаточно сделать замену

$$\begin{aligned}\mu\left(t\right) &= \mu\cos\omega_1 t+\nu\sin\omega_1 t,\\ \nu\left(t\right) &= -\mu\sin\omega_1 t+\nu\cos\omega_1 t.\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя в (5) выражения (7) и (8), получаем маргинальное распределение для когерентного состояния системы с трением, являющееся решением нового квантового уравнения типа Фоккера–Планка (4), записанного в представлении Шредингера

$$\begin{aligned}w_\alpha\left(X,\mu,\nu,t\right) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\exp\left(-\mid\alpha\mid^2\right)\frac{\exp\left[-\frac{X^2}{\omega_1^{-1}\left(\mu^2+\nu^2\right)}\right]}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\times\\ &\times\exp[-\frac{e^{-2\gamma_1 t}}{2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\left(\mu\cos\omega_1 t-\nu\sin\omega_1 t\right)-i\left(\mu\sin\omega_1 t+\nu\cos\omega_1 t\right)\right)^2\alpha^2\\ &+\frac{\sqrt{2}Xe^{-\gamma_1 t}}{\omega_1^{-1/2}\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\left(\mu\cos\omega_1 t-\nu\sin\omega_1 t\right)-i\left(\mu\sin\omega_1 t+\nu\cos\omega_1 t\right)\right)\alpha]\\ &\times\exp[-\frac{e^{-2\gamma_1 t}}{2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\left(\mu\cos\omega_1 t-\nu\sin\omega_1 t\right)+i\left(\mu\sin\omega_1 t+\nu\cos\omega_1 t\right)\right)^2\alpha^{*2}\\ &+\frac{\sqrt{2}Xe^{-\gamma_1 t}}{\omega_1^{-1/2}\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\left(\mu\cos\omega_1 t-\nu\sin\omega_1 t\right)+i\left(\mu\sin\omega_1 t+\nu\cos\omega_1 t\right)\right)\alpha^*]\\ &\times\exp\left[-\left(e^{-2\gamma_1 t}-1\right)\mid\alpha\mid^2\right].\end{aligned} \tag{9}$$

Так как когерентное состояние является производящей функцией для возбужденных состояний системы (см., напр., [8]), то справедливо равенство

$$w_\alpha(X,\mu,\nu,t) = \exp\left(-\mid\alpha\mid^2\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}}w_{nm}(X,\mu,\nu,t). \tag{10}$$

Вводя обозначение $w_n(X,\mu,\nu,t) = w_{nn}(X,\mu,\nu,t)$, мы получаем маргинальное распределение для возбужденного фоковского состояния $w_n(X,\mu,\nu,t)$, которое выражено через полином Эрмита от двух переменных $H_{nn}^{\{\beta\}}(x,y)$ (см., напр., [5])

$$\begin{aligned} w_n(X,\mu,\nu,t) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\exp\left[-\frac{X^2}{\omega_1^{-1}(\mu^2+\nu^2)}\right]\frac{e^{-2n\gamma_1 t}}{n!}\times \\ &\times H_{nn}^{\{\beta\}}\left(\frac{X}{\sqrt{\omega_1^{-1}(\mu^2+\nu^2)}},\frac{X}{\sqrt{\omega_1^{-1}(\mu^2+\nu^2)}}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\beta = 1 - e^{2\gamma_1 t}$. Используя связь между полиномами Эрмита двух переменных с обычными полиномами Эрмита [5]

$$H_{nn}^{\{\beta\}}(y,y) = (n!)^2\, 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2\beta)^k}{k!\,[(n-k)!]^2}H_{n-k}^2\left(\frac{(1+\beta)\,y}{\sqrt{2}}\right), \tag{12}$$

получаем маргинальное распределение для возбужденного фоковского состояния в виде

$$\begin{aligned} w_n(X,\mu,\nu,t) &= w_0(X,\mu,\nu)\,\frac{n!}{2^n}e^{-2n\gamma_1 t}\times \\ &\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2\beta)^k}{k!\,[(n-k)!]^2}H_{n-k}^2\left(\frac{X}{\sqrt{\omega_1^{-1}(\mu^2+\nu^2)}}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $w_0(X,\mu,\nu)$ – маргинальное распределение основного состояния системы

$$w_0(X,\mu,\nu) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\exp\left[-\frac{X^2}{\omega_1^{-1}(\mu^2+\nu^2)}\right]. \tag{14}$$

Как было продемонстрировано в [10], для квантового осциллятора с трением, который описывается с помощью гамильтониана Калдирола–Канаи $\widehat{H} = \widehat{p}^2 e^{-2\gamma_2 t}/2 + \omega_2^2\widehat{q}^2 e^{2\gamma_2 t}/2$ (ω_2 – частота невозбужденного осциллятора для модели Калдирола–Канаи), маргинальное распределение возбужденного фоковского состояния имеет вид

$$w_n(X,\mu,\nu,t) = w_0(X,\mu,\nu,t)\,\frac{1}{2^n n!}H_n^2\left(\frac{X}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon^*(a^2+b^2)}}\right), \tag{15}$$

где $w_0(X,\mu,\nu,t)$ – основное состояние осциллятора,

$$w_0(X,\mu,\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon\varepsilon^*(a^2+b^2)}}\exp\left(-\frac{X^2}{\varepsilon\varepsilon^*(a^2+b^2)}\right), \tag{16}$$

$$a = \frac{\exp(2\gamma_2 t)\,\nu\left(\varepsilon^*\,\dot{\varepsilon} + \varepsilon\,\dot{\varepsilon^*}\right)}{2\varepsilon\varepsilon^*} + \mu, \quad b = \frac{\nu}{\varepsilon\varepsilon^*} \tag{17}$$

и

$$\varepsilon(t) = \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\Omega}\left[(\gamma_2\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t) + i\sin\Omega t\right], \quad \Omega = \sqrt{\omega_2^2 - \gamma_2^2}. \tag{18}$$

Надо отметить, что характерной чертой данных двух моделей является то, что выражения для средней величины координаты в представлении модели Калдирола–Канаи и кинетического уравнения имеют одинаковый вид:

$$\langle\ddot{q}\rangle + 2\gamma_1\langle\dot{q}\rangle + \left(\omega_1^2 + \gamma_1^2\right)\langle q\rangle = 0 \tag{19}$$

для кинетического уравнения со столкновительным членом и

$$\langle\ddot{q}\rangle + 2\gamma_2\langle\dot{q}\rangle + \omega_2^2\langle q\rangle = 0 \tag{20}$$

для модели с гамильтонианом Калдирола–Канаи. Поэтому квантовую систему, которая может быть описана с помощью этих моделей, можно условно считать квантовым аналогом классического осциллятора с трением. Для того, чтобы сравнить две эти модели, мы взяли одинаковые значения для коэффициентов трения и для коэффициентов при величине $\langle q\rangle$ в выражении для средней величины координаты, т.е. $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,9$ и $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \gamma_1^2} = \omega_2 = 1,5$.

Сравнивая теперь маргинальные распределения (13) и (15), можно сделать несколько важных выводов.

1) Дисперсии функции вероятности состояния у двух моделей квантового трения различаются. В модели Калдирола–Канаи дисперсия маргинального распределения зависит от параметров μ, ν и величин γ, t, тогда как дисперсия функции вероятности в модели с кинетическим уравнением не зависит от величин γ и t, а зависит только от параметров μ и ν. Данное различие параметров дисперсии функции вероятности

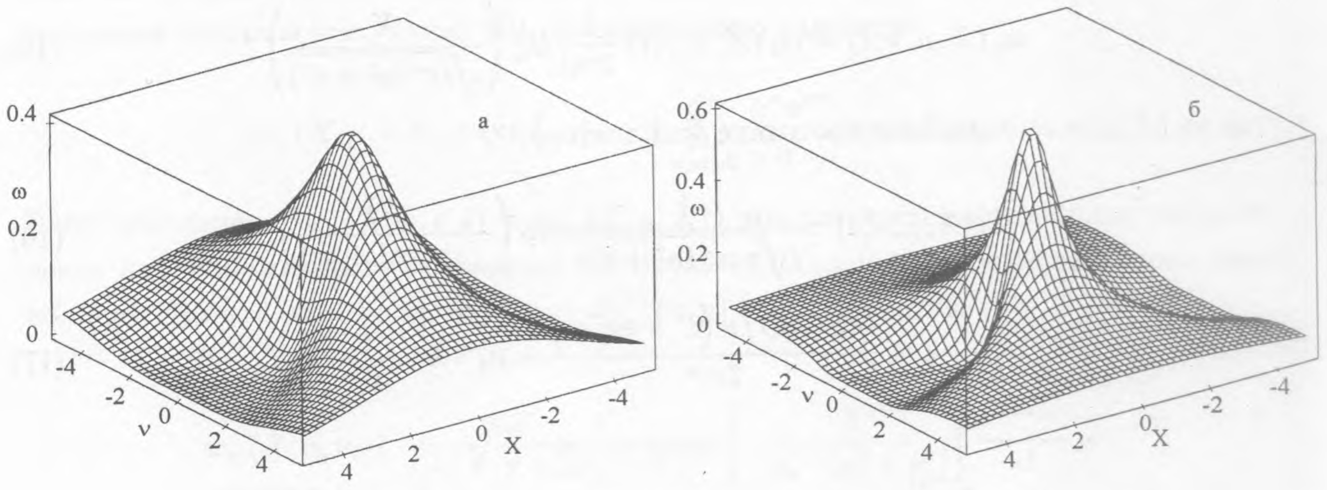

Рис. 1. *Маргинальное распределение основного состояния* $\omega_0(X,\nu)$ *а) для модели с кинетическим членом и б) для модели Калдирола–Канаи;* $\mu = 1,5$, $\gamma t = 0,9$.

состояния для двух моделей квантового осциллятора с трением легко видеть из рис. 1, где построены маргинальные распределения основного состояния ($n = 0$) квантового осциллятора с трением для модели с кинетическим трением (рис. 1а) и для модели с гамильтонианом Калдирола–Канаи (рис. 1б) ($\mu = 1,5$ и $\gamma t = 0,9$). Маргинальное распределение было построено в зависимости от переменной X и ν, а параметр μ и величины t и γ были взяты постоянными.

2) Как следует из структуры формул (13) и (15), в модели квантового трения с кинетическим уравнением наблюдаются нули функции вероятности (нули полинома Эрмита), что отсутствует для функции вероятности в модели Калдирола–Канаи. Данное различие показано на рис. 2, где было представлено маргинальное распределение первого возбужденного состояния ($n = 1$) квантового осциллятора с трением с фиксированными параметрами $\mu = 1$ и $\gamma t = 0,045$ в представлении двух моделей: модели с кинетическим уравнением (рис. 2а) и модели с гамильтонианом Калдирола–Канаи (рис. 2б).

3) Важный вывод можно сделать, рассматривая структуру выражений (13) и (15) с точки зрения зависимости от параметров μ и ν. Как было упомянуто выше, физическим смыслом параметров μ и ν является то, что они описывают ансамбль повернутых с изменением масштаба систем отсчета в фазовом пространстве системы, то есть описывают систему отсчета, в которой измеряется координата $\widehat{X}$ (см. выражение (1)). Видно,

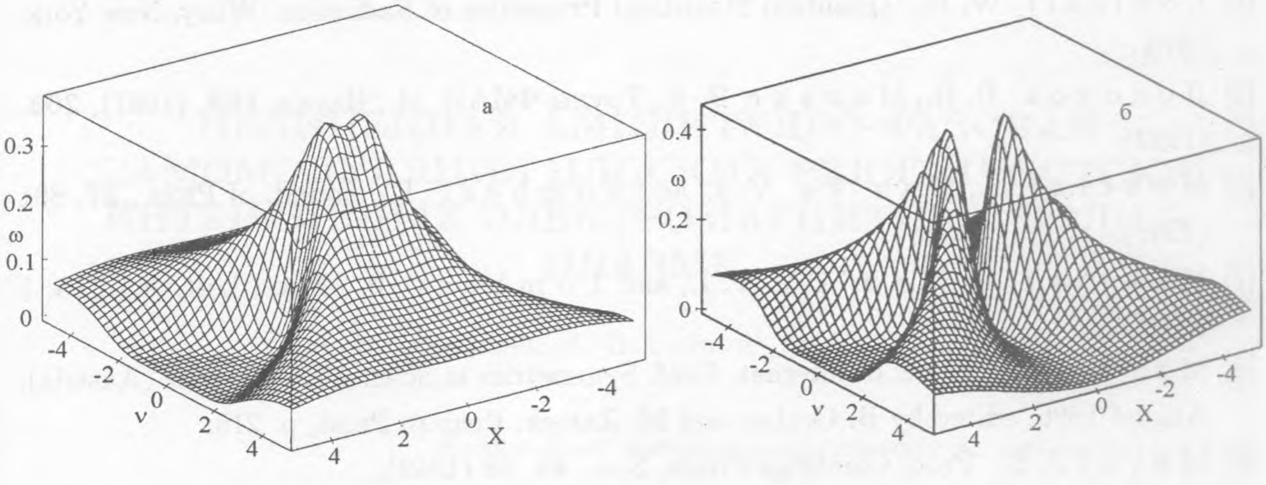

Рис. 2. *Маргинальное распределение первого возбужденного состояния* $\omega_1(X,\nu,t)$ *а) для модели с кинетическим членом и б) для модели Калдирола–Канаи;* $\mu = 1$, $\gamma t = 0,045$.

что функция вероятности (13) для модели квантового трения с кинетическим уравнением является симметричным выражением по параметрам μ и ν, а функция вероятности (15) для модели Калдирола–Канаи асимметрична относительно этих параметров. Это значит, что в симметричных системах отсчета, т.е. в системах отсчета, где параметры μ и ν представлены местами, функция вероятности состояния квантового осциллятора с трением в модели с кинетическим уравнением имеет одинаковый вид, тогда как функция вероятности состояния в модели Калдирола–Канаи в симметричных системах отсчета, описывается различными выражениями.

В заключение отметим, что поскольку, как показано выше, с помощью "классического" описания квантовой системы можно легко проанализировать различие между двумя моделями квантового трения (модель с гамильтонианом Калдирола–Канаи и модель с кинетическим уравнением со столкновительным членом), то можно надеяться на успешное применение представленного метода также для сравнения других моделей квантового трения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Caldirola P. Nuovo Cim., **18**, N 9, 393 (1941).

[2] Kanai E. Progr. Theor. Phys., **3**, N 4, 440 (1948).

[3] Ullersma P. Physica., **32**, 27 (1996).

[4] Louisell W. H. Quantum Statistical Properties of Radiation. Wiley, New York, 1973.

[5] Додонов В. В., Манько В. И. Труды ФИАН. М., Наука, **183**, (1987), **208**, (1992).

[6] Mancini S., Man'ko V. I., and Tombesi P. Found. of Phys., **27**, 801 (1997).

[7] Mancini S., Man'ko V. I., and Tombesi P. Phys. Lett. A., **213**, 1 (1996).

[8] Man'ko V. I. Proc. of Internat. Conf. Symmetries in Science IX, Bregenz (Austria), August 1996, edited by B. Gruber and M. Ramek, Plenum Press, p. 215.

[9] Moyal J. E. Proc. Cambrige Philos. Soc., **45**, 99 (1949).

[10] Манько В. И., Сафонов С. С. ТМФ, **112**, 467 (1997).

Поступила в редакцию 11 марта 1998 г.