Краткие сообщения по физике № 6-1984 г.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

С.А. Гаджиев, В.Я. Файнберг

УДК 517.946.4

Развита трансляционно-инвариантная диаграммная техника в методе стохастического квантования. Исследуются специфические особенности при обобщении этой техники на калибровочные теории.

1. При стохастическом квантовании неабелевых калибровочных теорий /1,2/ главная надежда возлагается на возможность избежать при расчете калибровочно-инвариантных величин вне рамок теории возмущений появления так называемых неоднозначностей Грибова /3/. При вычислении таких величин возникает большой произвол /2/, которым можно распорядиться в частности так, чтобы получить в теории возмущений анзац Фадеева-Попова /4/ или более общие схемы /5/ квантования калибровочных теорий /6,7/. Однако расчеты уже в однопетлевом приближении приводят к очень громоздким выражениям /8/. Одна из причин лежит в потере трансляционной инвариантности в $(D + 1)$-мерии при обычном выборе начальных условий в момент $t_0 = 0$.

2. Мы покажем, что: предельная теорема может быть доказана при начальном времени $t_0 = -\infty$; предельный переход $t_0 \to -\infty$ может быть совершен в интегральной форме записи уравнения Ланжевена; функции Грина при этом сохраняют трансляционную инвариантность в $(D + 1)$-мерии и при равных "временах" совпадают с функциями Грина D-мерной теории.

Уравнение Ланжевена для скалярного поля φ с действием $S(\varphi)$ имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial t} \equiv \dot{\varphi}(z) = -\frac{\delta S}{\delta\varphi} + \eta(z,t_0); \quad z = (x,t), \tag{1}$$

где $\eta(z,t_0)$ является гауссовой случайной силой, обращающейся в ноль при $t < t_0$. Плотность распределения по φ

$$P(\varphi,t;t_0) = \int D\eta \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \eta^2(x,t)\, d^D x d\tau\right\} \delta[\varphi(x) - \varphi(x,t;t_0)] \tag{2}$$

и удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\delta^2 P}{\delta\varphi^2} + \frac{\delta}{\delta\varphi}\left(P\,\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right) = 2e^{-S/2}\hat{H}(e^{S/2}P), \tag{3}$$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi^2}. \tag{4}$$

Из (2) следует, что

$$\langle\varphi(x_1,t;t_0)\ldots\varphi(x_n,t;t_0)\rangle_\eta = \int P(\varphi,t;t_0)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)D\varphi. \tag{5}$$

Уравнение (3) можно записать в виде:

$$-2\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad \Psi = Pe^{S/2}. \tag{6}$$

Решением (6) с начальным условием при $t = t_0$ будет:

$$\Psi(\varphi, t - t_0) = \sum_n C_n e^{-2\lambda_n(t-t_0)}\Psi_n(\varphi), \tag{7}$$

где λ_n и Ψ_n – собственные значения и функции H; $\lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n$.

Подставляя (7) в (5) с учетом (6), находим:

$$\langle\varphi(x_1,t;t_0)\ldots\varphi(x_n,t;t_0)\rangle_\eta = \sum_n C_n e^{-2\lambda_n(t-t_0)}\int\Psi_n(\varphi)e^{-S/2}\varphi(x_1)\ldots\times$$

$$\times\,\varphi(x_n)D\varphi. \tag{8}$$

Поскольку $\Psi_0 = e^{-s/2}$ является вакуумным функционалом: $H\Psi_0 = 0$, предельное распределение из (8) можно получить, устремляя любым способом $t - t_0 \to +\infty$:

$$\lim_{t-t_0\to+\infty}\langle\varphi(x_1,t;t_0)\ldots\varphi(x_n,t;t_0)\rangle_\eta = C_0\int e^{-S(\varphi)}\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)D\varphi.$$

Случай $t \to \infty$, $t_0 = 0$ ведет к потере трансляционной инвариантности в $(D + 1)$-мерии; при $t_0 \to -\infty$ и произвольном t, она сохраняется. Совершая предельный переход $t_0 \to -\infty$ в интегральной форме записи уравнения (1), имеем:

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z - z')[\eta(z') - \delta V/\delta\varphi(z')]d^{D+1}z', \tag{9}$$

здесь $V = S - \frac{1}{2}(-\partial_\mu^2 + m^2)\varphi$, $G(z)$ – запаздывающий пропагатор:

$$G(z) = (2\pi)^{-(D+1)/2} \int d^D k d\omega e^{i\omega t + ikx} (i\omega + k^2 + m^2)^{-1}. \tag{10}$$

В однопетлевом приближении пропагатор $D(k)$ скалярной частицы в модели $V(\varphi) = \lambda\varphi^3/3$ выразится в виде суммы трех диаграмм:

(a) (b) (c) (11)

Здесь каждой волнистой линии сопоставляется $\Delta(\omega, k^2) = (\omega^2 + (k^2 + m^2)^2)^{-1} = G(\omega, k^2)G(-\omega, k^2)$, а каждой линии $\rightleftharpoons -G(\pm\omega, k^2) = (\pm i\omega + k^2 + m^2)^{-1}$. Для $D = 4$ после интегрирования по ω и ω' получим:

$$D(k^2) = D^{(a)} + D^{(b)} + D^{(c)} = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^4 (k^2 + m^2)^2} \int d^4 q ((k+q)^2 + m^2)^{-1} \times$$

$$\times (q^2 + m^2)^{-1},$$

т.е. обычное выражение для пропагатора. Производящий функционал в $(D+1)$-мерии

$$Z(J) = Z^{-1}(0) \int D\eta \exp\left\{-\frac{1}{2}\int [\eta^2(z) - 2J(z)\varphi(z)] d^{D+1} z\right\}, \tag{12}$$

где φ удовлетворяет уравнению (1). Очевидно, что

$$\delta^n Z/\delta J(z_1) \dots \delta J(z_n)\Big|_{t_1 = \dots t_n, J=0} = \langle\varphi(x_1 t) \dots \varphi(x_n, t)\rangle_\eta =$$

$$= C_0 \int e^{-S(\varphi)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) D\varphi$$

не зависит от t и совпадает с искомой функцией Грина в D-мерной теории. Перейдем в (12) от интегрирования по η к переменным φ. Детерминант преобразования

$$\det \delta\eta(z)/\delta\varphi(z') \equiv M(\varphi) = \det\left\{\partial_t \delta(z - z') - \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')}\right\}$$

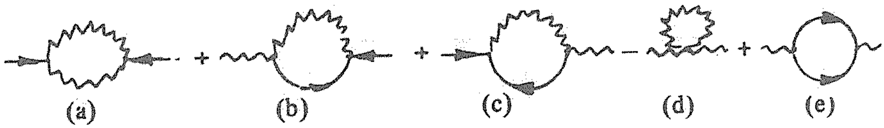
можно записать в виде интеграла по антикоммутирующим полям – духам:

$$M(\varphi) = \int D\bar{C}DC\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^{D+1}z\,(\bar{C}G^{-1}C - \bar{C}\,\frac{\delta^2 V}{\delta\varphi\delta\varphi}\,C)\right\},$$

где $G(z)$ определено в (10). В результате получим /9/:

$$Z(J) = Z^{-1}(0)\int D\varphi M(\varphi)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^{D+1}z\left|G^{-1}\varphi - \frac{\delta V}{\delta\varphi}\right|^2 + \int J\varphi d^{D+1}z\right\}. \quad (13)$$

Убедимся, что диаграммы теории возмущений для $D(k)$, возникающие из (13), совпадают с (11). Благодаря наличию члена $V_1 \sim \int G^{-1}\varphi\,\frac{\delta V}{\delta\varphi}\,d^{D+1}z$, из (13) появляются диаграммы с функцией распространения $\sim \delta^{D+1}(z - z')$. В λ^2 – приближении для $D(k)$ от члена $\sim V_1^2$ возникает совокупность диаграмм:



Член в (13) $\sim (\delta V/\delta\varphi)^2$ дает диаграмму (d) с обратным знаком, а детерминант $M(\varphi)$ – диаграмму (e) со знаком минус. В результате получим (11). Методом индукции эквивалентность двух выражений может быть доказана в произвольном порядке теории возмущений. Подчеркнем, что возникающий в (13) член $\sim \int \dot{\varphi}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi}\,d^{D+1}z$ можно формально свести к полной производной по времени от $L(\varphi)$:

$$\int d^{D+1}z\,\frac{\partial L(\varphi)}{\partial t} = \int d^D x\,(L(\varphi_{out}) - L(\varphi_{in})); \quad \varphi_{\substack{out\\ in}} = \lim_{t\to\pm\infty}\varphi(x,t), \quad (14)$$

а оставшиеся члены в экспоненте в (13) записать в суперсимметричном виде /10/ и, игнорируя вклад от (14), развить суперсимметричную теорию возмущений.

3. Обобщение изложенного метода на калибровочные теории требует модификации: продольная часть пропагатора калибровочного поля приобретает в $(D+1)$-мерии неинтегрируемую инфраособенность $\sim \omega^{-2}$. Но калибровочно-инвариантные величины в неабелевой теории не меняются, если добавить к уравнениям Ланжевена непотенциальный член $\sim D_\mu^{ab}v^b(A)$, $D_\mu^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_\mu + gf^{abc}A_\mu^c$, $v(A)$ – произвольный функционал от A. Производящий функционал для глюонных функций Грина в $(D+1)$-мерии будет:

$$Z(J) = Z_0^{-1} \prod_{\mu,\nu} \int DA_\mu^a M(A) \exp\left\{- \frac{1}{2} \int \left(\left[(G_{\mu\nu}^{-1} A_\nu)^a + D_\mu^{ab} U^b(A) - \frac{\delta V}{\delta A_\mu^a} \right]^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - J_\mu^a A_\mu^a \right) d^{D+1} z \right\},$$

$$M(A) = \prod_{\mu,\nu}^{ab} \int D\bar{C}_\mu^a D C_\nu^b \exp\left\{ \int \bar{C}_\mu^a \left[(G_{\mu\nu}^{-1})^{ab} + \frac{\delta}{\delta A_\mu^b} D_\mu^{ac} U^c(A) - \frac{\delta^2 V}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} \right] \times \right.$$

$$\left. \times C_\nu^b d^{D+1} z \right\}.$$

Для целей теории возмущений удобно выбрать $v(A) = a\partial_\mu A_\mu$. Тогда пропагатор C-поля $G_{\mu\nu}^{ab}(\omega,k) = \dfrac{\delta^{ab}}{i\omega + k^2}\left(\delta_{\mu\nu} + \dfrac{(1-a) k_\mu k_\nu}{i\omega + ak^2} \right)$. Пропагатор A-поля

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(\omega,k) = \delta^{ab} (\omega^2 + k^4)^{-1} (\delta_{\mu\nu} + (1 - a^2) k^2 k_\mu k_\nu (\omega^2 + a^2 k^4)^{-1}).$$

Расчеты поляризационного оператора в случае $v = a\partial_\mu A_\mu$, проведенные в /11/, а также сделанное там утверждение о сохранении унитарности вызывают возражения. Дело в том, что в случае локального выбора члена $D_\mu v(A)$ в уравнении Ланжевена, бдагодаря его непотенциальности (затухание!), in- и out-решения соответствующего вторично-квантованного уравнения не будут связаны унитарной S-матрицей в физическом пространстве *): поляризационный оператор будет содержать продольную часть, что, в частности, нарушит мультипликаторную перенормируемость матричных элементов **). В случае калибровочно-инвариантных величин ответ будет совпадать в рамках теории возмущений с обычным выражением. Непертурбативные ответы могут различаться.

Выражаем благодарность Б.Л. Воронову, А.М. Семихатову и И.В. Тютину за плодотворное обсуждение статьи.

Поступила в редакцию 4 января 1984 г.

---

*) Это обусловлено тем, что в отличие от абелевой теории S-матрица в неабелевой теории не является локально калибровочно-инвариантной величиной.

**) Подробности будут опубликованы в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Parisi, W. Yongshi, Scientia Sinica, 24, 483 (1981).
2. L. Brulieu, D. Zwanziger, Nucl. Phys., B 193, 163 (1981).
3. V.N. Gribov, Nucl. Phys., B 139, 1 (1978).
4. L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett., B 25, 30 (1967).
5. I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, Phys. Lett., B 102, 27 (1981).
6. T. Hori, preprint TMUP-HEL-8207, 1982.
7. A. M. Семихатов, Письма в ЖЭТФ, 38, 38 (1983).
8. M. Namiki, I. Ohba et al., preprint WU-REP-82-6, 1982.
9. Y. Nakano, Prog. Theor. Phys., 69, 361 (1982).
10. M. V. Feigel'man, A. M. Tsvelick, Phys. Lett., A 95, 469 (1983).
11. H. Nakagoshi, M. Namiki et al., Prog. Theor. Phys. (Letters), 70, 326 (1983).