УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНАЯ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ САМОМОДУЛЯЦИЯ ПЛОСКИХ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А. В. Боровский, А. Л. Галкин[1], О. Б. Ширяев

Нелинейные плоские релятивистски интенсивные электромагнитные волны в плазме исследованы в рамках задачи Ахиезера – Половина. Построены аналитические приближенные решения этой задачи. Установлено, что определяющим физическим эффектом при распространении электромагнитных волн в плазме является их нелинейная амплитудно-фазовая самомодуляция.

Распространение плоских, в том числе релятивистски интенсивных, электромагнитных волн в холодной плазме описывается в рамках классической задачи Ахиезера – Половина [1, 2]. В общем случае решения этой задачи могут быть получены численно. Для отдельных случаев, таких, как колебания малой амплитуды, чисто продольные колебания, монохроматические колебания с малой продольной составляющей, в [1, 2] получены аналитические приближения. В [3] аналитически исследованы плоские электромагнитные волны линейной поляризации, фазовая скорость которых значительно превосходит скорость света. В работе [4] представлены результаты подробного численного исследования решений уравнений Ахиезера – Половина на фазовой плоскости. В [5] также рассмотрены волны малой амплитуды, соответствующие решениям уравнений Ахиезера – Половина, и кроме того, построены решения этих уравнений в пределе высоких амплитуд.

Аналитическое решение уравнений Ахиезера – Половина представляет интерес для прояснения физики распространения сильных электромагнитных волн в плазме. Кроме

[1]Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша.

того, для строго анализа задач рассеяния интенсивного лазерного излучения в плазме возникает потребность в точном (численном) решении уравнений Ахиезера – Половина, поскольку эти решения можно использовать в качестве опорных для анализа неустойчивостей распространения лазерного излучения в плазме (см., например, [6, 7]).

Целью данной работы является численное и аналитическое исследование задачи Ахиезера – Половина. Рассматривается случай, когда фазовая скорость распространяющегося лазерного излучения превосходит скорость света на малую величину и впервые проводится построение асимптотических разложений этой задачи по соответствующему малому параметру. Получаемые таким образом решения описывают немонохроматические волны. На основе полученных соотношений установлена адиабатическая связь между локальными значениями амплитуды и частоты распространяющегося электромагнитного поля и выведено дисперсионное соотношение, связывающее среднюю частоту поля и период плазменной волны.

1. Уравнения Ахиезера – Половина. Рассмотрим уравнения Максвелла и релятивистской гидродинамики электронной компоненты плазмы на фоне неподвижных ионов:

$$\mathbf{A}_{xx} - \mathbf{A}_{tt} = \frac{n}{\gamma}\mathbf{A}, \ \varphi_{xx} = n - 1, \ p_t = (\varphi - \gamma)_x,$$

$$n_t + \left(\frac{n}{\gamma}p\right)_x = 0, \ \gamma = \sqrt{1 + |\mathbf{A}|^2 + p^2}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ и φ – векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, нормированные на $m_e c^2/e$, p и n – продольная компонента импульса и плотность электронной компоненты плазмы, нормированные соответственно на $m_e c$ и невозмущенную электронную плотность. Время и координаты нормированы на величины, обратные соответственно временной и пространственной собственным частотам невозмущенной плазмы ω_p и ω_p/c. Приведенные ранее уравнения записаны в кулоновской калибровке, в силу чего продольная компонента вектор-потенциала равна нулю.

Как показано в [1], отыскание решений данных уравнений, зависящих от одной переменной $\xi = x - qt$, где $q = (1 + \epsilon^2)^{1/2}$ – фазовая скорость, а ϵ – параметр, сводится к решению следующей задачи:

$$\epsilon^2 \mathbf{A}_{\xi\xi} + F(\mathbf{A}, \varphi, \epsilon)\mathbf{A} = 0, \tag{1}$$

$$\epsilon^2 \varphi_{\xi\xi} + F(\mathbf{A}, \varphi, \epsilon)\varphi - 1 = 0, \tag{2}$$

$$F(\mathbf{A}, \varphi, \epsilon) = \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{\varphi^2 + \epsilon^2(1 + |\mathbf{A}|^2)}}. \tag{3}$$

При этом имеют место законы сохранения

$$\epsilon^2|\mathbf{A}_\xi|^2 + \varphi_\xi^2 + W(\mathbf{A}, \varphi, \epsilon) = E = const,$$

$$W(\mathbf{A}, \varphi, \epsilon) = \frac{2}{\epsilon^2}\left[\sqrt{1+\epsilon^2}\sqrt{\varphi^2 + \epsilon^2(1+|\mathbf{A}|^2)} - \varphi\right],$$

$$A_1 A_{2\xi} - A_2 A_{1\xi} = M = const,$$

где A_1 и A_2 – компоненты вектор-потенциала ($A_3 = 0$ в кулоновской калибровке), а импульс и возмущения электронной плотности выражаются через векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля:

$$p = \epsilon^{-2}[\sqrt{\varphi^2 + \epsilon^2(1+|\mathbf{A}|^2)} - \sqrt{1+\epsilon^2}\varphi], \tag{4}$$

$$n - 1 = \epsilon^{-2}\left[1 - \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \epsilon^2(1+|\mathbf{A}|^2)}}\right]. \tag{5}$$

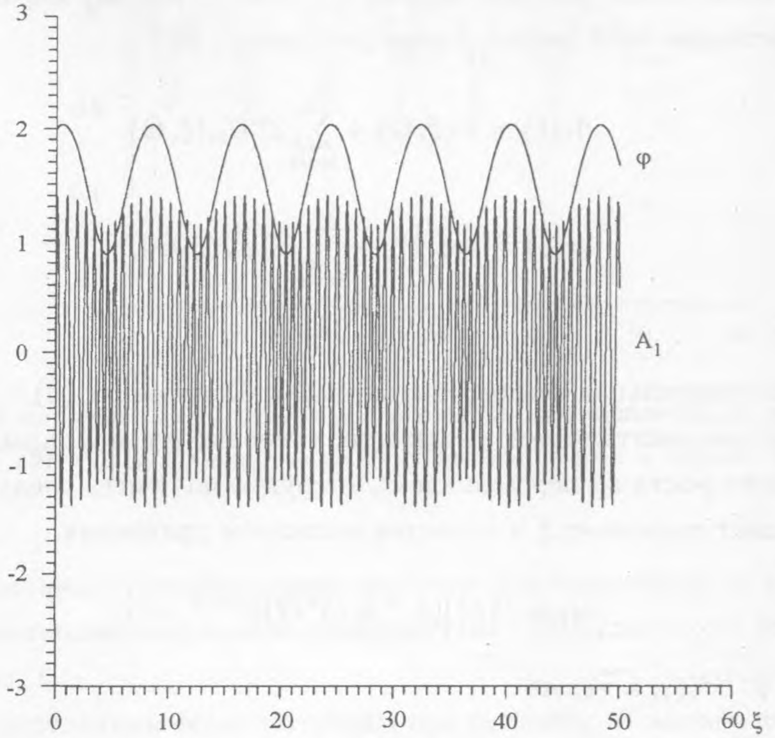

Рис. 1. *Результаты численного решения задачи Ахиезера – Половина (1) – (3). Начальные условия:* $A_1(0) = 1,2$, $A_{1\xi}(0) = 5$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi_\xi(0) = 0$, $\epsilon = 0,1$.

На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи Ахиезера – Половина (1) – (3). Использованы следующие условия: $A_1(0) = 1,2$, $A_{1\xi}(0) = 5$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi_\xi(0) = 0$, $\epsilon = 0,1$. Наблюдается концентрация электромагнитного излучения между гребнями электростатического потенциала (амплитудная модуляция), причем вся картина перемещается с фазовой скоростью q. Изменяется также частота осцилляций векторного потенциала между гребнями и минимумом скалярного потенциала (фазовая модуляция).

2. Линейно поляризованные электромагнитные волны. Рассмотрим распространение линейно поляризованных электромагнитных волн в плазме. Для этого положим $A_2 \equiv 0$, что может быть обеспечено соответствующим выбором начальных условий. В экспериментах по исследованию распространения мощных лазерных импульсов в плазме как правило используется линейно поляризованное излучение.

В случае, когда частота распространяющегося лазерного излучения намного превосходит плазменную частоту, фазовая скорость электромагнитных волн оказывается близка к скорости света, и параметр ϵ является малой величиной. Нашей целью является построение асимптотик решений задачи (1) – (3) по малому параметру ϵ. Для этого будем искать решения этой задачи в виде (см., напр., [8]):

$$A_1(\xi) = U(\xi, \Theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m U_m(\xi, \Theta), \tag{6}$$

$$\varphi(\xi) = \phi(\xi, \Theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \phi_m(\xi, \Theta), \tag{7}$$

$$\Theta_\xi = \epsilon^{-1} k(\xi). \tag{8}$$

Здесь $k(\xi)$ – дополнительная неизвестная функция. Подставляя (6) – (8) в (1) – (3), приравнивая нулю сомножители при различных степенях ϵ и накладывая условие отсутствия секулярного роста по переменной Θ, нетрудно получить следующие результаты: функция ϕ зависит только от ξ и является решением уравнения

$$\phi_{\xi\xi} = (1/2)[\phi^{-2} + (g^2/2)\phi^{-3/2} - 1], \tag{9}$$

причем $k(\xi) = \phi^{-1/2}(\xi)$, а также

$$\Theta = \epsilon^{-1} \int \phi^{-1/2} d\xi, \tag{10}$$

$$U(\xi, \Theta) = g\phi^{1/4} \sin\Theta. \tag{11}$$

В последнем соотношении константа g является параметром связи между электромагнитной волной и ленгмюровским откликом плазмы и определяется начальными условиями. Для уравнения (9) выполняется следующий закон сохранения:

$$\phi_\xi^2 + V(\phi) = E = const, \tag{12}$$

$$V(\phi) = \phi + \phi^{-1} + g^2\phi^{-1/2}. \tag{13}$$

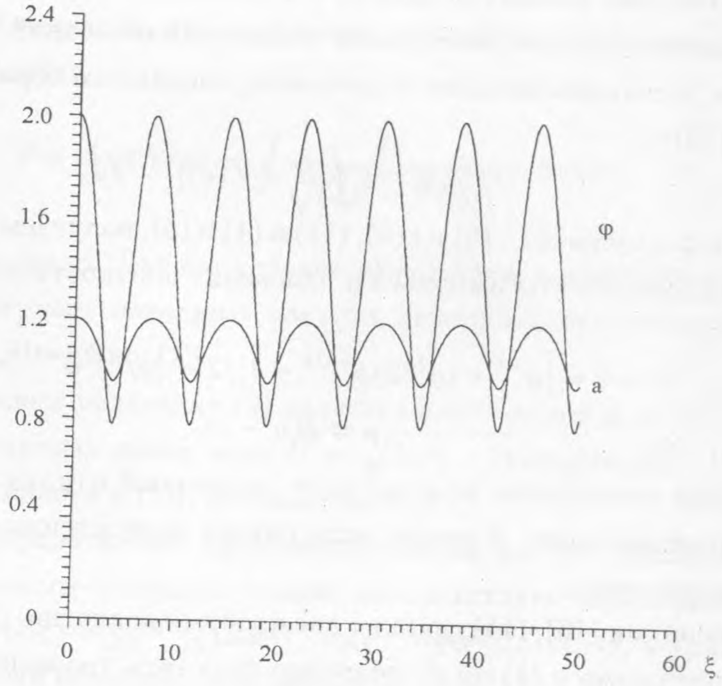

Рис. 2. *Скалярный потенциал φ и огибающая a векторного потенциала, рассчитанные согласно уравнениям (9) – (11). Начальные условия те же, что и в случае, изображенном на рис. 1.*

На рис. 2 представлено приближенное решение для потенциала φ и огибающей амплитуды вектор-потенциала на основе уравнений (6) – (11) для тех же условий, которым соответствует рис. 1.

Аналогичные результаты были получены при решении несколько иной задачи – построении теории распространения релятивистски интенсивных солитонов лазерного излучения в плазме. Численно эти солитоны, центральная часть которых также испытывает амплитудную и частотную самомодуляцию, были обнаружены в [9] (позднее этот результат был воспроизведен в [10], также численно). Как отмечалось в этих работах, в пределе малых амплитуд в условиях солитонного режима распространения самомодуляция пропадает, и для солитона существует простое выражение в гиперболических функциях [11]. В [12] для описания таких солитонов в нерелятивистском пределе был применен метод ВКБ, а релятивистская теория распространения интенсивного лазерного излучения в плазме была построена в [13] при помощи этого же метода.

Приближения высших порядков описывают генерацию гармоник в плазме. Их значение главным образом сводится к демонстрации возможности исключения секулярного роста в приближениях высших порядков, и в настоящей работе они не приводятся.

Интегральное выражение для периода медленных колебаний, генерируемых распространяющимся электромагнитным излучением, очевидным образом следует из соотношений (12) – (13):

$$T(E, g^2) = \oint [E - V(\phi)]^{-1/2} d\phi. \qquad (14)$$

Подставляя формулы (6) – (8) и (10), (11) в (4) и (5), получаем следующие выражения для продольной компоненты импульса и изменения плотности электронной компоненты плазмы:

$$n - 1 = [\phi^{-2} + (g^2/2)\phi^{-3/2} - 1]/2 - (g/2)^2 \phi^{-3/2} \cos 2\Theta,$$
$$p = \phi(n-1), \qquad (15)$$

т.е. электронная компонента плазмы дает медленный отклик на распространяющееся электромагнитное поле, а также испытывает вынужденные колебания на частоте второй гармоники поля.

С соотношениями (10), (11) связаны две простых аналогии. Заметим, что формально разлагая нелинейность в (1) по ϵ^2, нетрудно получить уравнение $\epsilon^2 \mathbf{A}_{\xi\xi} + \varphi^{-1}\mathbf{A} = 0$.

Во-первых, если предположить, что функция φ меняется плавно (а это предположение возникает естественно, так как разлагая по ϵ^2, мы получаем уравнение без сингулярных возмущений), то данное уравнение можно интерпретировать как задачу о маятнике Эйнштейна – осцилляторе с медленно меняющейся со временем частотой [14]. И хотя, в отличие от этой задачи, в нашем случае сдвиг частоты не задан явным образом, а определяется как решение дополнительного нелинейного уравнения, имеет место такая же связь между локальными значениями частоты $k(\xi) = \phi^{-1/2}(\xi)$ и амплитуды $a_0 = g\phi^{1/4}(\xi)$: $a_0^2 k = g^2$, и, таким образом, параметр связи g^2 в нашей задаче является аналогом адиабатического инварианта в задаче о маятнике с медленно меняющейся частотой. Следует отметить, что так как сдвиг частоты распространяющегося лазерного импульса может быть зарегистрирован экспериментально, полученное соотношение между частотой и амплитудой может быть использовано для диагностики процесса распространения лазерного излучения.

Во-вторых, приведенное выше уравнение аналогично уравнению Шредингера для частицы в потенциальной яме, причем параметр ϵ играет роль постоянной Планка, а функция φ^{-1} – квадрата импульса. В силу того, что эта величина в уравнениях Ахиезера – Половина соответствует квадрату локального значения плазменной частоты, она не может быть отрицательной, а следовательно, в соответствующей квантово-механической системе нет точек поворота. В рамках данной аналогии выражения (10), (11), очевидно, соответствуют приближению ВКБ.

Как и в квантовой механике, для построенных нами приближенных решений имеют место условия квантования:

$$J = \oint \phi^{-1/2} d\xi = \oint \frac{d\phi}{\sqrt{\phi(E - V(\phi))}} = 2\pi\epsilon m,$$

где $m >> 1$ – целое число. Данное условие имеет смысл дисперсионного соотношения: осредненная по периоду локальная частота электромагнитного поля определяется выражением $\bar{\Omega} = (J/\epsilon T) = (2\pi m/T)$.

Простейшим решением уравнения (9) является константа $\phi \equiv \phi_0 > 1$, которой соответствует электромагнитная волна вида $U = \sqrt{2(\phi_0^2 - 1)} \sin(\xi/\epsilon\sqrt{\phi_0})$. Неустойчивость этого решения, приведенного в [15], исследована в [3].

3. Циркулярно поляризованные электромагнитные волны. Циркулярно поляризованным электромагнитным волнам в плазме соответствуют приближенные решения задачи (1) – (3) вида $A_1(\xi) = g\phi^{1/4}(\xi)\sin\Theta$, $A_2(\xi) = g\phi^{1/4}(\xi)\cos\Theta$, а уравнение для ϕ и соответствующий первый интеграл отличаются от (9) и (12), (13) тем, что в них входит соответственно g^2 вместо $g^2/2$ и $2g^2$ вместо g^2. При этом в отклике электронной компоненты плазмы на распространяющуюся электромагнитную волну отсутствуют вторые гармоники: $n - 1 = (\phi^{-2} + g^2\phi^{-3/2} - 1)/2$, а для импульса по-прежнему справедливо соотношение (15)).

Как и в случае линейной поляризации, существуют циркулярно поляризованные волны постоянной амплитуды:

$$A_1 = \sqrt{\phi_0^2 - 1}\sin(\xi/\epsilon\phi_0^{1/2}),\ A_1 = \sqrt{\phi_0^2 - 1}\cos(\xi/\epsilon\phi_0^{1/2}).$$

Данное частное решение является не приближенным, а точным. Исследованию его неустойчивости посвящен ряд работ (см., напр., [6, 7]).

Таким образом, в данной статье получены численные решения задачи Ахиезера – Половина (рис. 1) и ее приближенные аналитические решения (рис. 2). Анализ этих решений позволяет сделать вывод о сильной нелинейной амплитудно-фазовой модуляции плоских релятивистски сильных волн в плазме.

Работа частично финансировалась РФФИ (проекты N 96-02-16401 и 96-02-18264).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер А. И., Половин Р. В. ЖЭТФ, **30**, 915 (1956).
[2] Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. М., Наука, 1974.
[3] Max Claire and Perkins F. Phys. Rev. Lett., **276**, 1342 (1971).
[4] Kaw P. K., Sen A., and Valeo E. J. Physica, **9D**, 96 (1983).
[5] Chian A. C.-L., and Clemmow P. C. J. Plasma Phys., **14**(3), 505 (1975).
[6] Sakharov A. S., Kirsanov V. I. Phys. Plasmas, **4**(9), 3382 (1997).
[7] Боровский А. В., Галкин А. Л., Коробкин В. В., Ширяев О. Б. Квантовая электроника, **24**(10), 929 (1997).
[8] Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems (Springer-Verlag, 1990).
[9] Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В. ЖЭТФ, **76**, 148 (1979).
[10] Kaw P. K., Sen A., and Katsouleas T. Phys. Rev. Lett., **68**, 3172 (1992).
[11] Kuehl H. H. and Zhang C. Y. Phys. Rev. E, **48**, 1316 (1993).
[12] Цинцадзе Н. Л., Цхакая Д. Д. ЖЭТФ, **72**, 480 (1977).
[13] Sudan R. N., Dimant Y. S., and Shiryaev O. B. Phys. Plasmas, **4**(5), 1489 (1997).
[14] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Наука, 1965.
[15] Цинцадзе Н. Л., Цхакая Д. Д. Релятивистские нелинейные эффекты в плазме. Тбилиси, Изд-во Мецниереба, 1989.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 11 марта 1998 г.