Краткие сообщения по физике № 7-1984 г.

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ГРУППОЙ SL (2,C)

А.Н. Лезнов, В.И. Манько, С.М. Чумаков

УДК 534.2

Получены явные выражения для солитонных решений широкого класса нелинейных уравнений, связанные с группой SL(2, C).

Традиционные методы построения солитонных решений интегрируемых нелинейных уравнений – метод обратной задачи рассеяния /1/ и метод "одевания" /2,3/ пользуются в настоящее время большой популярностью. В работе одного из авторов /4/ предложена альтернативная процедура явного нахождения тех же решений, дающая определенные технические удобства. В /5/ этот новый метод был применен для конечной непериодической цепочки Тода, в /6/ – для модели типа главного кирального поля на группе SL (2,C). Цель настоящей заметки – явное построение решений с произвольным количеством солитонов для широкого класса (в определенном смысле для всех) нелинейных уравнений, связанных с группой SL (2,C) (см. /3/).

Пусть U и V – две матрицы 2×2 ($\mathrm{sp}U = \mathrm{sp}V = 0$), матричные элементы которых зависят от x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + [U,V] = 0. \qquad (1)$$

Система (1) может рассматриваться как условие совместности двух уравнений для матрицы $g(x, y)$ размерности 2×2 ($\det g = 1$)

$$\dot{g} \equiv \frac{dg}{dx} = Ug \equiv \begin{pmatrix} U_0 & U_+ \\ U_- & -U_0 \end{pmatrix} g, \quad g' \equiv \frac{dg}{dy} = Vg \equiv \begin{pmatrix} V_0 & V_+ \\ V_- & -V_0 \end{pmatrix} g. \qquad (2)$$

Будем искать такие решения (1) (а значит (2)), когда матрица U и V имеют определенную аналитическую структуру по отношению к дополнительно вводимому параметру λ (так называемому спектральному параметру), а именно:

$$U = \sum_{\alpha=1}^{M_1} \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{U_\alpha^s}{(\lambda - \mu_\alpha)^s} + \sum_{s=0}^{n} U_s \lambda^s,$$

$$V = \sum_{\beta=1}^{M_2} \sum_{s=1}^{m_\beta} \frac{V_\beta^s}{(\lambda - \nu_\beta)^s} + \sum_{s=0}^{m} V_s \lambda^s. \tag{3}$$

Здесь M_1, M_2, n_α, m_β, n, m – целые числа, μ_α, ν_β – призвольные комплексные числа. Известные нелинейные уравнения: Кортевега-де-Вриза, SIN-Гордон, нелинейное уравнение Шредингера и многие другие являются частными случаями уравнений (1) – (3). Мы ищем, таким образом, матрицы $U_\alpha^s(x,y)$ и $V_\beta^t(x,y)$, уравнения для которых вытекают из (1), при подстановке в него (3) и требования выполнения (1) тождественно при всех значениях λ. Система (1) – (3) была предложена в /3/, до сих пор решения были получены лишь для некоторых простых случаев зависимости от λ в (3), что связано с технической сложностью традиционных методов.

Исходным пунктом для нас является тот факт, что система (3) эквивалентна системе линейных дифференциальных уравнений на единственную скалярную функцию $\Psi \equiv g_{11}$. Действительно, повторным дифференцированием получаем из (2):

$$\ddot{\Psi} - \dot{U}_+ (U_+)^{-1} \dot{\Psi} = [U_+ (U_0 (U_+)^{-1})^{\cdot} + U_0^2 + U_+ U_-]\Psi, \tag{5а}$$

$$\Psi'' - V_+' (V_+)^{-1} \Psi' = [V_+ (V_0 (V_+)^{-1})' + V_0^2 + V_+ V_-]\Psi, \tag{5б}$$

$$(\dot{\Psi} - U_0 \Psi)(U_+)^{-1} = (\Psi' - V_0 \Psi)(V_+)^{-1} \equiv g_{21}. \tag{5в}$$

Проведем построение солитонных решений в явном виде. Потребуем, чтобы система (5) имела два фундаментальных решения вида:

$$\Psi_1 = \exp(\varphi + \overline{\varphi}) \prod_{i=1}^{N_1} (a_i - \lambda), \quad \Psi_2 = \exp(-\varphi - \overline{\varphi}) \prod_{j=1}^{N_2} (b_j - \lambda), \tag{6}$$

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{M_1} \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{\varphi_\alpha^s(x)}{(\lambda - \mu_\alpha)^s} + \sum_{s=0}^{n} \varphi_s(x) \lambda^s,$$

$$\overline{\varphi} = \sum_{\beta=1}^{M_2} \sum_{s=1}^{m_\beta} \frac{\overline{\varphi}_\beta^s(y)}{(\lambda - \nu_\beta)^s} + \sum_{s=0}^{m} \overline{\varphi}_s(y) \lambda^s,$$

где $\Psi^s_\alpha(x)$, $\Psi_s(x)$, $\overline{\Psi}^s_\beta(y)$, $\overline{\Psi}_s(y)$ – произвольные функции своих аргументов; функции $a_i(x,y)$, $b_j(x,y)$ будут определены ниже. Выразим коэффициенты $U_\pm$, U_0 в (5а) через Ψ_1, Ψ_2, следя, чтобы для них сохранялась структура (3) зависимости от λ. Из (5а) получаем:

$$U_+ = \frac{1}{p}\begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \dot{\Psi}_1 & \dot{\Psi}_2 \end{vmatrix} ; \quad U_+\left(\frac{U_0}{U_+}\right)^{\cdot} + U_0^2 + U_+U_- = \frac{1}{U_+p}\begin{vmatrix} \ddot{\Psi}_1 & \ddot{\Psi}_2 \\ \dot{\Psi}_1 & \dot{\Psi}_2 \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

где p – не зависит от x; из (3), (6) следует, что $p = p_{N_1+N_2}(\lambda)$ – полином по λ порядка $N_1 + N_2$. Так как U_+ не имеет полюсов в нулях λ_s полинома $p_{N_1+N_2}(\lambda)$, то из (7) следует

$$C_s \exp[2(\varphi(\lambda_s) + \overline{\varphi}(\lambda_s))] \prod_{i=1}^{N_2} (a_i - \lambda_s) + \prod_{j=1}^{N_2} (b_j - \lambda) = 0, \qquad (8)$$

$$s = 1, 2, \dots, N_1 + N_2.$$

Здесь λ_s и C_s – произвольные комплексные числа ($\lambda_s \neq \lambda_{s'}$, $s \neq s'$). Соотношения (8) – это линейная система алгебраических уравнений относительно элементарных симметрических функций, составленных из a_i или b_j. (Ниже все компоненты U и V, соответствующие солитонным решениям, будут выражены именно через такие симметрические функции).

Из (7) ясно, что (5а) удовлетворяется, если взять $U_0 = \dot{\Psi}_1\Psi_1^{-1} - fU_+$, $U_- = \dot{f} + fU_0 + f^2U_+$, где $f(x,y,\lambda)$ следует подобрать так, чтобы зависимость $U_0(\lambda)$ имела вид (3). Достаточно взять

$$f = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i}{(a_i - \lambda)U_+(a_i)} + \epsilon U_+, \quad U_+(a_i) \equiv U_+(\lambda)\Big|_{\lambda = a_i} \qquad (9)$$

Здесь $\epsilon(x)$ – произвольная функция, независящая от λ (ее появление связано с калибровочным преобразованием (2)); U_+ задано согласно (7), (8). Так как решения (6) удовлетворяют (5а) при любых значениях λ, то и $U_-(\lambda)$ имеет структуру (3). Уравнение (5б) рассматривается аналогично (с заменой $\cdot \to {}'$, $U_{\pm,0} \to V_{\pm,0}$, $\varphi \to \overline{\varphi}$, $\epsilon \to \overline{\epsilon}$, $f \to \overline{f}$). Из (5в) следует, что

$$\frac{1}{U_+}\begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \dot{\Psi}_1 & \dot{\Psi}_2 \end{vmatrix} = p_{N_1+N_2}(\lambda) = \frac{1}{V_+}\begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_1' & \Psi_2' \end{vmatrix},$$

где $p_{N_1+N_2}(\lambda)$ не зависит от x и y. Подстановка U_0, U_+, V_0, V_+ теперь показывает, что (5в) выполняется, если $\epsilon=\overline{\epsilon}$. Окончательно, подставляя (6) и (9) в выражения для U и V, имеем:

$$U_+ = \prod_{i=1}^{N_1} (a_i-\lambda) \prod_{j=1}^{N_2} (b_j-\lambda)\, p^{-1}_{N_1+N_2}(\lambda) \times$$

$$\times \left(-2\dot{\varphi} + \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\dot{b}_j}{b_j-\lambda} - \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i}{a_i-\lambda} \right),$$

$$U_0 = \dot{\varphi} + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i}{a_i-\lambda} \left(1 - \frac{U_+(\lambda)}{U_+(a_i)} \right),$$

$$U_- = 2 \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i[\dot{\varphi}(\lambda) - \dot{\varphi}(a_i)]}{U_+(a_i)(a_i-\lambda)} + \sum_{i,j=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i\dot{a}_j}{U_+(a_i)U_+(a_j)(a_i-\lambda)} \times$$

$$\times \left[\frac{U_+(a_j) - U_+(\lambda)}{a_j-\lambda} - \frac{U_+(a_j) - U_+(a_i)}{a_j-a_i} \right],$$

$$V_+ = \prod_{i=1}^{N_1} (a_i-\lambda) \prod_{j=1}^{N_2} (b_j-\lambda)\, p^{-1}_{N_1+N_2}(\lambda) \left(-2\overline{\varphi}' + \sum_{j=1}^{N_2} \frac{b_j'}{b_j-\lambda} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_i'}{a_i-\lambda} \right),$$

$$V_0 = \overline{\varphi}' + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_i'}{a_i-\lambda} \left[1 - \frac{V_+(\lambda)}{V_+(a_i)} \right], \tag{10}$$

$$V_- = 2 \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_i'[\overline{\varphi}'(\lambda) - \overline{\varphi}'(a_i)]}{V_+(a_i)(a_i-\lambda)} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N_1} \frac{a_i' a_j'}{V_+(a_i)V_+(a_j)(a_i-\lambda)} \left[\frac{V_+(a_j) - V_+(\lambda)}{a_j-\lambda} - \frac{V_+(a_j) - V_+(a_i)}{a_j-a_i} \right]$$

Здесь $\dot\varphi(a_i) \equiv \dot\varphi(\lambda)|_{\lambda=a_i}$, $\overline{\varphi}'(a_i) \equiv \overline{\varphi}'(\lambda)|_{\lambda=a_i}$; (мы положили $\epsilon = 0$ в (9)). Из проведенного рассмотрения видно, что U и V в (10) имеют требуемую структуру (3) по λ и удовлетворяют системе уравнений (5).

Таким образом (10) вместе с (8) дают явные выражения для солитонных решений системы (1) – (3). Из (10), приравнивая члены при одинаковых степенях λ, легко можно получить решения в покомпонентной форме, т.е. выражения для U^s_α, U_s, V^s_β, V_s в разложении (3).

Поступила в редакцию 9 февраля 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Е. Захаров и др., Теория солитонов, "Наука", М., 1980 г.
2. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, Функ. анализ и его прилож., 17, 3 (1978).
3. В.Е. Захаров, А.В. Михайлов, ЖЭТФ, 74, 1953 (1978).
4. А.Н. Лезнов, ТМФ, 57, 156 (1984).
5. A.N. Lesnov, in Proc. II Conf. on Non–linear Processes in Physics and Turbulence, Kiev, 1983, Gordon and Breach, 1984.
6. А.Н. Лезнов, В.И. Манько, С.М. Чумаков, Препринт ФИАН, № 70, М., 1984 г.