

НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СТОЛБЕ ЖИДКОСТИ

И.В. Шуган

УДК 536.25

Теоретически исследованы режим развитого конвективного течения и режим конвекции с образованием застойной зоны вблизи подогреваемого торца. Описано распространение сильного разрыва скорости.

1. В задаче о конвективном течении в открытом термосифоне, которая естественно возникает при описании природных гейзерных эффектов, а также аналогичных эффектов в масштабных устройствах криогенной техники, уже получены результаты, детально описывающие стационарные режимы [1,2]. В то же время эксперимент с подогревом столба жидкости ставится, в основном, в условиях, когда процесс взрывообразного вскипания опережает установление стационарного распределения скорости U , температуры T , давления P .

Подогрев жидкости в длинной вертикальной трубе ($l/a \geq 50$, l — длина, a — радиус трубы) с закрытым нижним торцом и теплоизолированными боковыми стенками описываем уравнениями неразрывности, баланса импульса и сохранения энергии в приближении Буссинеска. Вводим безразмерные переменные:

$$U = \frac{kl}{a^2} u, \quad T = T_1 - \frac{\nu kl}{a g a^4} \Theta, \quad X = lx, \quad R = ar; \quad t = \frac{a^2}{k} \tau,$$

где k, ν, a — коэффициенты теплопроводности, вязкости, теплового расширения, g — ускорение свободного падения, x — координата вдоль трубы, r — поперечная координата, T_1 — температура жидкости на верхнем срезе в резервуаре. В этих переменных исходные уравнения в приближении осесимметричности течения и при $\nu/k \geq 1$ имеют вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)_{r=1} = \int_0^1 (\Theta - \Theta_w) r dr,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 r \Theta dr + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 r u \Theta dr = \left(\frac{a}{l} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 r \Theta dr, \quad (1)$$

$$\left(\frac{u}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{\partial \Theta_w}{\partial \tau}, \quad \Theta_w(x, \tau) \equiv \Theta(x, r=1, \tau).$$

Граничные условия к системе уравнений (1) следующие:

$$u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 r \Theta dr = a, \quad \text{при } x = 0; \quad (2)$$

$u = 0, d\Theta/dr = 0$, при $r = 1$; $\Theta = 0$ при $x = 1$ в точках поперечного сечения, где вытекающая жидкость имеет максимальную скорость. Начальные условия: $\Theta = 0$ при $\tau = 0$. Решение (1) представляем в виде:

$$u = J_0(\mu_1 r) u_1(x, \tau) + J_0(\mu_2 r) u_2(x, \tau), \quad \Theta = \Theta_0(x, \tau) + J_0(\mu_2 r) \Theta_1(x, \tau),$$

μ_1 — корни уравнения $dJ_0/dr = 0, r = 1, \Theta_0 = \int_0^1 r \Theta dr$.

2. Время установления профиля средней по поперечному сечению температуры на верхнем срезе много меньше времени установления течения, тогда значение $\partial^2 \Theta_0 / \partial x^2$ при $x = 1$ можно взять из решения стационарной задачи. В результате граничные условия преобразуются к виду:

$$\Theta_1 = - \frac{a}{l} \sqrt{q} \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} \left[1 - \exp \left(- \frac{\mu_2^2 \tau}{2J_0(\mu_2)} \right) \right], \quad \text{при } x = 1, \Theta = 0 \text{ при } x = 1,$$

$$r = 0,75.$$

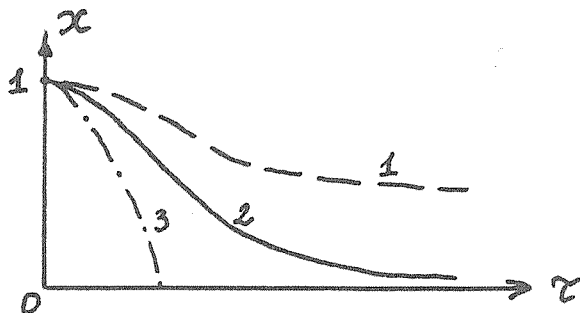
$\Theta = 0$ при $x = 1, r = 0,75$. Для уравнения (1) с граничными (2) и начальными условиями можно показать, во-первых, что непрерывное однозначное решение невозможно; во-вторых, слабое решение включает разрыв функций, причем его траектория совпадает с огибающей характеристик уравнения (1). Траектория сильного разрыва:

$$x = 1 - a \left(1 + e^{-\mu_2^2 \tau} - 2e^{-\mu_2^2 \tau / 2} \right), \quad \text{где } a = 2 \frac{a\sqrt{q}}{l\mu_2^2} (\mu_2^2 - \mu_1^2)^{-1/2}.$$

Анализ показывает, что ударная волна, несущая разрыв скорости, образуется в начальный момент у верхнего среза и движется вниз; с ростом τ интенсивность сильного разрыва изменяется по закону:

$$l \sim (a\mu_2^2/2) e^{-\mu_2^2 \tau} [1 - e^{-\mu_2^2 \tau} - (x-1)/a].$$

Траектории разрывов при различных граничных условиях представлены на рис. 1. Кривые 1-3 построены при $q = 10^3, 10^7, 10^9$ ($l/a = 100$).



Р и с. 1. Траектории разрыва скорости при различных граничных условиях: $q = 10^3$ (1), $q = 10^7$ (2), $q = 10^9$ (3)

3. Застойная зона в нижней части трубы образуется при $a \leq 1$; в этом случае сильный разрыв не достигает нижнего торца за конечное время. При выполнении противоположного неравенства разрыв достигает нижнего торца за время $\tau = -\mu_2^{-2} \ln(1 - \mu_2 a^{-1/2})$, после чего во всем столбе имеется развитое конвективное течение. В этом случае решение строим методом сращения асимптотических разложений внешнего решения (1) с пограничным слоем у нижнего торца. Характерное время установления течения $\tau_u \sim \mu_2^{-2}$.

Уравнение для средней температуры Θ_0 .

$$\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial \tau} = \frac{J_0^2(\mu_1)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} 2\Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x},$$

исследуем методом Фурье. Непрерывная функция $\Theta_0(x, \tau)$, являющаяся решением этого уравнения, имеет линии разрыва производных в плоскости (x, τ) . Главный член асимптотики при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\Theta_0 \sim -\lambda - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left|x - \frac{x^3}{3}\right| + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \exp\left[-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} \tau\right],$$

то есть время установления температурного распределения $\tau_T \sim 4(l/\pi a)$. Оценки показывают, что $\tau_T \gg \tau_u$ для больших длин труб ($l/a \geq 50$).

Автор благодарен Г.А. Ляхову за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию 16 июня 1983 г.

После переработки 20 февраля 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Lighthill, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 6, 398 (1953).
2. P. Griffith, ASME-AICHE Heat Transfer Conference, Texas. 1962, p. 1-13.