УДК 530.1

О СПОСОБАХ ОПИСАНИЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Л. Шелепин

Рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения и отвечающие им псевдодифференциальные уравнения Фоккера – Планка для скачкообразных марковских процессов. Приводятся точные решения для аналога процесса Орнштейна – Уленбека.

Как известно, описание случайных процессов диффузионного типа базируется на уравнениях второго порядка (Фоккера – Планка для вероятностей или Шредингера для амплитуд вероятности). В работе [1] были рассмотрены обобщения этих уравнений на случай скачкообразных процессов – псевдодифференциальные уравнения Фоккера – Планка и Шредингера (дифференциальные уравнения бесконечного порядка) и приведены точные решения этих уравнений в некоторых простых частных случаях.

Здесь мы рассмотрим связь псевдодифференциального уравнения Фоккера – Планка со стохастическими дифференциальными уравнениями. Это позволит нам построить обобщение процесса Орнштейна – Уленбека, играющего важную роль в физических приложениях (в частности, в теории броуновского движения), на случай конечных скачков.

Напомним, что формулировке теории диффузионных процессов на основе уравнения Фоккера – Планка

$$\partial_t p(x,t|x_0,t_0) = -\partial_x A(x,t) p(x,t|x_0,t_0) + \frac{1}{2}\partial_x B(x,t)\partial_x B(x,t) p(x,t|x_0,t_0) \tag{1}$$

отвечает эквивалентная формулировка на основе стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) + B(x,t)L(t), \tag{2}$$

где $A(x,t)$ – коэффициент сноса, связанный с действием неслучайной силы, $B(x,t)$ – интенсивность случайной силы $L(t) = W'(t)$ – производной винеровского процесса. Т.е.

(2) позволяет дать описание произвольного диффузионного процесса с помощью простейшего непрерывного процесса $W(t)$. Однако как уравнение Фоккера – Планка, так и уравнение Ланжевена со случайной силой $L(t) = W'(t)$ описывают процессы с непрерывными траекториями и не описывают скачкообразные процессы (процессы с разрывными траекториями, например, процессы Коши и Пуассона).

Для описания скачкообразных марковских процессов необходимо использовать более общие уравнения, чем (1) и (2). Так, в уравнении (2) производная винеровского процесса (гауссов белый шум) может быть заменена на производную некоторых простейших скачкообразных процессов. Вместо же уравнения второго порядка (1) надо рассматривать дифференциальное уравнение бесконечного порядка, записываемое обычно в форме разложения Крамерса – Мойала

$$\partial_t p(x,t) = \hat{\Lambda} p(x,t),\ \hat{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial_x^n K_n(x,t), \tag{3}$$

$$K_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x-x')^n p(x, t+\Delta t | x', t) dx,$$

где коэффициенты $K_n(x,t)$ называют моментами перехода [2, 3].

Отметим, что моменты перехода на самом деле тесно связаны с кумулянтами, а не моментами соответствующего процесса, как об этом можно было бы судить исходя из названия. Кумулянты (семиинварианты) определяются как коэффициенты κ в разложении логарифма характеристической функции $f(k)$ по степеням k,

$$\ln f(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \kappa_n. \tag{4}$$

В [4] показано, что либо все моменты перехода, кроме первых двух, равны нулю, либо отличны от нуля все K_n при четных n, причем выполняется неравенство

$$K_n^2 \leq K_{n-2} K_{n+2},\ n \geq 4,\ \text{четное}. \tag{5}$$

Аналогично, либо все кумулянты, кроме первых двух, равны нулю, либо имеется бесконечно много отличных от нуля кумулянтов (теорема Марцинкевича, см. [3, 5]). Особенно проста связь между моментами перехода и кумулянтами в случае постоянных коэффициентов K_n. В этом случае (3) для характеристической функции дает

$$\partial_t f(k,t) = \Lambda(k) f(k,t),\ \ln f(k,t) = \Lambda(k)(t-t_0),\ \Lambda(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} K_n. \tag{6}$$

Сопоставляя (4) и (6), получим

$$\kappa_n = K_n(t - t_0). \tag{7}$$

Скачкообразные марковские процессы можно, в свою очередь, разделить на два широких класса:

1. все скачки имеют одинаковую амплитуду (естественным для этого случая является дискретное множество возможных состояний);

2. амплитуда различных скачков различна (непрерывное множество возможных состояний).

Рассмотрим коротко первый случай, к которому относятся, например, пуассоновский процесс и случайное блуждание по прямой. Им отвечают уравнения

$$\partial_t p(x,t) = \gamma[p(x+l,t) - p(x,t)],\ \partial_t p(x,t) = \gamma[p(x+l,t) + p(x-l,t) - 2p(x,t)],$$

где l – амплитуда скачков (шаг), γ – частота скачков (вероятность шага в единицу времени). Представляя перемещение из точки x в $x + l$ действием оператора сдвига $e^{l\partial_x}$, можно переписать их в виде дифференциальных уравнений бесконечного порядка

$$\partial_t p(x,t) = \gamma(e^{l\partial_x} - 1)p(x,t),\ \partial_t p(x,t) = 2\gamma(\mathrm{ch}(l\partial_x) - 1)p(x,t). \tag{8}$$

Эти уравнения с постоянными коэффициентами могут быть легко решены путем перехода к уравнениям на характеристические функции (см. [3]). Разлагая их правые части в ряд, получим для четных моментов перехода соответственно $K_n = \gamma l^n$ или $K_n = 2\gamma l^n$ и точное равенство $K_n^2 = K_{n-2}K_{n+2}$ как предельный случай неравенства (5). Нечетные моменты отвечают за снос. Кумулянты процесса Пуассона связаны с моментами перехода K_n соотношением (7), $\kappa_n = \gamma l^n(t - t_0)$.

Роль малого параметра в разложении (8) по степеням ∂_x играет величина скачка l – в пределе частых малых скачков уравнение для случайного блуждания переходит в уравнение диффузии, а уравнение для пуассоновского процесса – в уравнение Лиувилля.

Для описания более сложных скачкообразных процессов можно применять СДУ, основанные, однако, на использовании в качестве базисного уже не винеровского процесса, а простейшего скачкообразного процесса – процесса Пуассона. Так, при рассмотрении дробового шума используется аналогичное (2) СДУ, где флуктационная сила выражается через производную процесса Пуассона, $L(t) = N'(t)$ [3]. Как уже отмечалось, это описание пригодно лишь в том случае, если все скачки имеют одинаковую фиксированную амплитуду (случайным является время прихода δ-импульсов, вызывающих скачки).

Перейдем теперь к случаю скачков произвольной величины. Действительно, для многих процессов амплитуда различных скачков неодинакова, например, если мы рассмотрим изменение скорости за счет соударений при тепловом движении. Здесь можно говорить лишь о верхнем пределе на амплитуду скачка, определяемом скоростью теплового движения молекул.

Как подчеркивается в [2], вывод уравнения Фоккера – Планка основан на математическом доказательстве Колмогорова, в котором предполагается, что имеется бесконечно много бесконечно малых скачков; на этом же предположении основано обычное рассмотрение диффузии. Поэтому при обобщении подхода Ланжевена естественным шагом представляется замена винеровского процесса $W(t)$ на более общий $W_\lambda(t)$ с характерной (максимальной) амплитудой скачков λ, в пределе частых малых скачков переходящий в винеровский $W_0(t)$, а при $\lambda \to \infty$ – в процесс Коши $W_\infty(t)$, характеризующийся бесконечной дисперсией (амплитуда скачков не ограничена).

Указанным требованиям удовлетворяет рассмотренный в [1] процесс, который мы ниже будем называть λ-процессом и обозначать как $W_\lambda(t)$. Этот процесс представляет собой решение псевдодифференциального уравнения Фоккера – Планка (ПдФП)

$$\partial_t p(x,t|x_0,t_0) = \frac{c}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-(\lambda\partial_x)^2}\right)p(x,t|x_0,t_0), \tag{9}$$

где λ имеет смысл величины, а c/λ – частоты скачков. Характеристическая функция $f(k,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial f(k,t)/\partial t = (c/\lambda)\left(1-\sqrt{1+\lambda^2k^2}\right)f(k,t),$$

$$f(k,t) = \exp[(c(t-t_0)/\lambda)\left(1-\sqrt{1+\lambda^2k^2}\right)]f(k,t_0). \tag{10}$$

Принимая во внимание начальное условие $p(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$, откуда следует, что $f(k,t_0) = \exp(ikx_0)$, получим

$$f(k,t) = \exp(ikx_0 + (c(t-t_0)/\lambda)\left(1-\sqrt{1+\lambda^2k^2}\right)). \tag{11}$$

Плотность вероятности находится с помощью обратного преобразования Фурье $p(x,t) = (1/2\pi)\int \exp(-ikx)f(k,t)dk$,

$$p(x,t|x_0,t_0) = K_{c\tilde{t},\lambda}(x-x_0) \equiv \frac{c\tilde{t}}{\pi\lambda}e^{c\tilde{t}/\lambda}((c\tilde{t})^2+\tilde{x}^2)^{-1/2}K_1[((c\tilde{t})^2+\tilde{x}^2)^{1/2}/\lambda], \tag{12}$$

где $K_1(x)$ – функция Макдональда, $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{t} = t - t_0$ и для вычисления интеграла использована формула (2.5.39.2) из [7].

Предельным случаям отвечают хорошо известные процессы. При $\lambda \to \infty$ (точнее, $\lambda >> ((ct)^2 + x^2)^{1/2}$), используя формулу $K_1(z) \approx 1/z$, справедливую при $z << 1$, получим плотность перехода процесса Коши $K_\infty(t)$ (лоренциан)

$$p(x, t|x_0, t_0) = K_{c\tilde{t},\infty}(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi} \frac{c\tilde{t}}{c^2\tilde{t}^2 + \tilde{x}^2} \tag{13}$$

с характеристической функцией $\exp(-ct|k|)$ (подробнее о процессе Коши см. [6]). Амплитуда скачков в этом случае не ограничена.

В пределе $\lambda \to 0$, $c \to \infty$ и конечном λc (9) переходит в уравнение диффузии

$$\partial_t p(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{2}\lambda c \partial_x^2 p(x, t|x_0, t_0),$$

что соответствует гауссову процессу с коэффициентом диффузии $D = \lambda c$ (винеровский процесс получается при $\lambda c = 1$). Гауссов процесс, таким образом, отвечает пределу бесконечно частых бесконечно малых скачков.

Используя безразмерные параметры $\xi = (x - x_0)/\lambda$ и $\tau = c(t - t_0)/\lambda$, распределение (12) (мы будем называть его λ-распределением) можно переписать как

$$p(\xi, \tau) = \frac{\tau}{\pi\lambda} e^\tau (\tau^2 + \xi^2)^{-1/2} K_1[(\tau^2 + \xi^2)^{1/2}]. \tag{14}$$

Из (14) видно, что форма графика функции плотности λ-распределения зависит от одного параметра $\tau = c(t - t_0)/\lambda$; λ задает естественный масштаб по x. Дисперсия λ-распределения $\sigma^2 = \lambda c(t - t_0)$ [1]. В зависимости от значения τ можно выделить три характерных случая: а) $\tau << 1$, б) $\tau \approx 1$, в) $\tau >> 1$. В случае а) имеем распределение Коши с полушириной (половиной расстояния между точками x_1, x_2, для которых $f(x) = f_{max}/2$) $c(t - t_0)$; крылья до значений $x \approx \lambda$ соответствуют убыванию по закону $1/x^2$. В случае б) распределение Коши описывает центральную часть, крылья убывают по степенному закону типа $1/x^n$, промежуточному между $1/x^2$ и экспоненциальным. В случае в) справедливо нормальное распределение со среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{\lambda c(t - t_0)}$.

Согласно (7) нечетные кумулянты λ-процесса равны нулю (снос отсутствует), а четные $\kappa_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(n - 1/2) c\lambda^{2n-1}(t - t_0)$. В частности, первые два момента $< W_\lambda(t) >= \kappa_1 = 0$, $< W_\lambda(t_0) W_\lambda(t) >= \kappa_2 = c\lambda(t - t_0)$ совпадают с таковыми для винеровского процесса с $D = \lambda c$.

Рассмотрение СДУ для скачкообразных процессов начнем с процесса, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) + L(t), \tag{15}$$

где $A(x,t)$ – коэффициент сноса, связанный с действием неслучайной силы, а $L(t) = W'_\lambda(t)$ – производная λ-процесса. Процесс $L(t)$ (негауссов белый шум) имеет те же два первых момента, что и гауссов белый шум, $< L(t) >= 0$, $< L(t_0)L(t) >= c\lambda\delta(t-t_0)$, но в отличие от гауссова белого шума, который характеризуется нулевыми кумулянтами κ_n при $n > 2$, здесь четные кумулянты отличны от нуля.

Уравнению (15) отвечает ПдФП уравнение вида

$$\partial_t p(x,t|x_0,t_0) = -\partial_x(A(x,t)p(x,t|x_0,t_0)) + \frac{c}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-(\lambda\partial_x)^2}\right)p(x,t|x_0,t_0). \tag{16}$$

Если коэффициент сноса не зависит от x и t, $A(x,t) = a$, то решение (16) отличается от решения (12) свободного уравнения (9) лишь заменой $x \to x - a(t-t_0)$, что полностью аналогично диффузионнму случаю.

Рассмотрим теперь случай $A(x,t) = \gamma x$, которому в диффузионном пределе отвечает процесс Орнштейна – Уленбека,

$$\partial_t p(x,t) = \partial_x(\gamma x p(x,t)) + \frac{c}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-\lambda^2\partial_x^2}\right)p(x,t). \tag{17}$$

Ему отвечает уравнение для характеристической функции $f(k,t)$

$$\partial_t f(k,t) = -\gamma k \partial_k f(k,t) + \frac{c}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1+\lambda^2 k^2}\right)f(k,t). \tag{18}$$

Это уравнение первого порядка может быть решено методом характеристик, для чего запишем вспомогательные уравнения

$$\frac{dt}{l} = \frac{dk}{\gamma k} = \frac{df}{(c/\lambda)(1-\sqrt{1+\lambda^2k^2})f}. \tag{19}$$

Интегрирование первого из них дает $ke^{-\gamma t} = C = \mathrm{const}$, второго – $f = [(1 + \sqrt{1+\lambda^2k^2})/2]^{-c/\lambda\gamma}\exp[-(c/\lambda\gamma)\sqrt{1+\lambda^2k^2}]C_1$, где $C_1 = C_1(ke^{-\gamma t})$. C_1 как функция $ke^{-\gamma t}$ находится из начального условия $p(x_0,0|x,0) = \delta(x-x_0)$, $f(k,0) = \exp(ikx_0)$. В результате вычислений имеем

$$f(k,t) = \exp\left[\frac{c}{\lambda\gamma}\left(\sqrt{1+\lambda^2k^2e^{-2\gamma t}} - \sqrt{1+\lambda^2k^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2k^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2k^2e^{-2\gamma t}}}\right) + ix_0ke^{-\gamma t}\right]. \tag{20}$$

Решение это достаточно громоздко, тем не менее дисперсия (находимая по формуле $M(x^2) = -\partial^2 f(k,t)/\partial k^2|_{k=0}$) совпадает с таковой для диффузионного процесса Орнштейна – Уленбека, $\sigma^2 = \frac{c\lambda}{2\gamma}(1 - \exp(-2\gamma t))$.

Стационарное решение (которое легко получить и непосредственно из (18)) имеет вид

$$f(k,\infty) = \exp\left[\frac{c}{\lambda\gamma}\left(1 - \sqrt{1+\lambda^2 k^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2 k^2}}{2}\right)\right]. \tag{21}$$

В пределе $\lambda \to 0$ и при конечном $c\lambda$ (много малых скачков) получаем характеристическую функцию нормального распределения $\exp(-c\lambda k^2/4\gamma)$, а в пределе $\lambda \to \infty$ – характеристическую функцию распределения Коши $\exp(-c|k|/\gamma)$ с полушириной c/γ.

Как известно, процесс Орнштейна – Уленбека дает описание рэлеевской частицы – броуновской частицы, рассматриваемой в более мелкой временной шкале, когда в качестве стохастической функции берется скорость, а не координата частицы. Уравнение Фоккера – Планка для эволюции плотности функции распределения $f(v,t)$, где v – скорость броуновской частицы массы M, в этом случае записывается в виде [2, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v,t) = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial v} v f(v,t) + \frac{kT}{M}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) f(v,t). \tag{22}$$

Здесь $kT = mv_0^2/2$, где v_0 – средняя скорость теплового движения молекул, а параметр γ пропорционален частоте столкновений. Это уравнение имеет стационарное решение

$$f(v,\infty) = (M/2\pi kT)^{1/2}\exp(-Mv^2/mv_0^2). \tag{23}$$

В частности, при $M = m$ стационарная функция распределения

$$f(v,\infty) = (1/\sqrt{\pi}v_0)\exp(-v^2/v_0^2) \tag{24}$$

представляет собой одномерное распределение Максвелла. Несмотря на то, что при $M = m$ мы получили правильный ответ в пределе $t \to \infty$, уравнение (22) применимо лишь для достаточно тяжелых частиц с массой $M/m >> 1$ (изменение скорости за одно столкновение должно быть незначительным). Для молекул же газа изменение скорости за одно соударение имеет тот же порядок, что и сама скорость, и диффузионное приближение (22) не является удовлетворительным.

Однако и рассмотренное выше псевдодифференциальное уравнение (17) или соответствующее ему СДУ (15) также неадекватны задаче (в частности, не дают правильного стационарного распределения (23)). Дело в том, что снос в этих уравнениях, задаваемый коэффициентами $A(v,t) = \gamma v$, вызван действием некоторой внешней неслучайной силы (или бесконечно частыми и малыми соударениями), а не случайными соударениями, приводящими к скачкообразному изменению скорости, как в рассматриваемом нами случае. Уравнения вида (17) и (15) описывают случай, когда имеется скачкообразная "диффузия" и плавный снос.

Следуя [1], обратимся к рассмотрению уравнения

$$\partial_t p(v,t) = \left(1 - \sqrt{1 - (\partial_v \Lambda(v))^2}\right)(c(v)/\Lambda(v))p(v,t). \tag{25}$$

Потребуем, чтобы псевдодифференциальное уравнение Фоккера – Планка вида (25) переходило в (22) в диффузионном пределе $m/M \to 0$. Это требование позволяет определить коэффициенты $\lambda(v)$, $c(v)$, и мы получаем псевдодифференциальное уравнение

$$\partial_t p(v,t) = \gamma\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{M}(v_0 \partial_v e^{-Mv^2/2mv_0^2})^2}\right) e^{Mv^2/mv_0^2} p(v,t), \tag{26}$$

где $\gamma = l/v_0$ – частота столкновений, а l – длина свободного пробега. Функция $f(x,\infty)$ (23) является, как нетрудно проверить, стационарным решением псевдодифференциального уравнения (26), описывающего скачкообразные процессы и переходящего в (22) при $m/M \to 0$.

Если в диффузионном пределе (уравнение Фоккера – Планка) снос задается коэффициентом при первой степени дифференциального оператора ∂_x, то в уравнении ПдФП снос может быть введен двояко: либо по-прежнему, как в диффузионном пределе, что отвечает действию неслучайной силы, либо ненулевыми коэффициентами при бесконечном числе нечетных степеней ∂_x, что отвечает скачкообразным изменениям скорости при соударениях частиц.

Проведенное выше рассмотрение приводит к следующему выводу. В диффузионном пределе вид уравнения Фоккера – Планка или Ланжевена не зависит от того, обусловлен снос действием некоторой внешней неслучайной силы или теми же соударениями, что и диффузия. Если же соударения не являются частыми и малыми, а приводят к конечным скачкообразным изменениям физических величин, то мы получим различные уравнения в зависимости от того, чем обусловлен снос.

Псевдодифференциальные уравнения, описывающие скачкообразные процессы, могут быть записаны в различных видах в зависимости от порядка расстановки операторов x и ∂_x. Выше мы использовали две формы записи – симметричную (25), (26) и разложение Крамерса – Мойала. Разложение Крамерса – Мойала в диффузионном пределе дает уравнение Фоккера – Планка в форме Ито (производные слева от функций

$K_n(x,t)$), а уравнения (25), (26) – уравнение Фоккера – Планка в форме Стратоновича (симметричной форме).

Весьма интересным является вопрос о соотношении псевдодифференциальных уравнений (25), (3) и СДУ (в интерпретации Стратоновича или Ито)

$$dx = B(x,t)dW_\lambda(t). \tag{27}$$

Такое представление скачкообразных процессов, возможно, упростило бы их исследование, т.к. при решении СДУ (27) можно было бы опираться на известные свойства процесса $W_\lambda(t)$. Интерпретация Стратоновича здесь может оказаться предпочтительнее, т.к. уравнение ПдФП в симметричной форме более удобно для нахождения стационарного решения, чем разложение Крамерса – Мойала.

Автор признателен С. А. Решетняку за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шелепин А. Л. ЯФ, **60**, N 2, 265 (1997).

[2] Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М., Высшая школа, 1990.

[3] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986.

[4] Pawula R. F. Trans. IEEE, **IT-3**, 33 (1967).

[5] Rajagopal A. K., Sudarshan E. C. G. Phys. Rev., **A10**, 1852 (1974).

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., Наука, 1967.

[7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981.

[8] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 2. М., Мир, 1978.

Поступила в редакцию 1 марта 1998 г.