Краткие сообщения по физике № 8-1984 г.

К РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОЧЕНЬ ТОНКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С.А. Старцев

УДК 532.517.2

Получено замкнутое решение в лагранжевых координатах для рэлей-тейлоровской неустойчивости очень тонкого слоя идеальной жидкости. Проведено сравнение с результатами численных расчетов.

Лагранжевы координаты /1/ используются для решения различных задач движения жидкости /2/, в том числе и для описания рэлей-тейлоровской (РТ) неустойчивости /3,4/. В препринте /5/ сформулирован подход к решению задачи о РТ неустойчивости слоя идеальной жидкости путем разложения по малой амплитуде возмущения $A \ll 1/k$ (k – волновое число первоначально синусоидального по оси x возмущения). Члены разложения по A при временах $t \gg 1/\sigma$, где $\sigma = \sqrt{kg}$, выходят на асимптотическое решение $\propto \exp(n\sigma t)$ /5/, где n – номер члена. Поэтому при этих временах будем рассматривать только асимптотическое решение

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_0,y_0)\exp(n\sigma t), \tag{1}$$

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x_0,y_0)\exp(n\sigma t),$$

$$P/\rho g = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x_0,y_0)\exp(n\sigma t).$$

Будем считать, что $k|Y_1| \ll 1$, и разложим y_n, x_n и P_n в ряд по y_0 и Y_1 ($y_0 = 0$ и $y_0 = Y_1$ – лагранжевы координаты границ слоя). Тогда

$$kx = kx_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n[\alpha_n^{00} + k(\alpha_n^{11} y_0 + \alpha_n^{01} Y_1) + \dots],$$

$$ky = ky_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n[\beta_n^{00} + k(\beta_n^{11} y_0 + \beta_n^{01} Y_1) + \dots], \tag{2}$$

$$kP/\rho g = ky_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n[k^2\gamma_n^{22}(y_0 - Y_1)y_0 + \dots].$$

Здесь $Z = kA\exp(\sigma t)$ и учтено, что на границах $P_n = 0$.

Подставляя разложение (2) в уравнения Эйлера в лагранжевых координатах /5/, получим уравнения для определения коэффициентов α, β, γ, зависящих только от x_0. Уравнения для α_n^{00} и β_n^{00} имеют вид

$$n^2 \alpha_n^{00} = d\beta_n^{00}/dx_0, \; n^2 \beta_n^{00} = -d\alpha_n^{00}/dx_0. \tag{3}$$

Обычно выбирают начальное возмущение границы, удовлетворяющее уравнениям (3), в виде $\beta_n^{00} = \delta_{n1}\cos kx_0$, $\alpha_n^{00} = -\delta_{n1}\sin kx_0$ ($\delta_{11} = 1$, $\delta_{n1} = 0$ при $n > 1$).

Учитывая эти выражения $\beta_1^{11} = \cos kx_0$, а для α_n^{11}, β_n^{11}, γ_n^{22} получаем систему уравнений:

$$\beta_n^{11} = \beta_{n-1}^{11}\cos kx_0 - \alpha_{n-1}^{11}\sin kx_0,$$

$$n^2 \alpha_n^{11} = -2\gamma_{n-1}^{22}\sin kx_0 + d\beta_n^{11}/dx_0,$$

$$n^2 \beta_n^{11} = -2\gamma_n^{22} + 2\gamma_{n-1}^{22}\cos kx_0 - d\alpha_n^{11}/dx_0. \tag{4}$$

Нетрудно также показать, что $\alpha_n^{01} = -\alpha_n^{11}/2$, $\beta_n^{01} = -\beta_n^{11}/2$.

Последовательно вычисляя члены α_n^{11}, β_n^{11} и γ_n^{22}, замечаем, что, начиная с $n = 2$, $\beta_n^{11} = (n-1)^{-1} U_{n-2}(\cos kx_0)$, где U_n – полином Чебышева второго рода. Несколько более сложно выражаются через полиномы Чебышева и величины α_n^{11} и γ_n^{22}. Для окончательной проверки соответствующих выражений использовался метод математической индукции.

Суммирование разложений по полиномам Чебышева приводит к следующим формулам:

$$y = y_0 + Z(1 + ky_0)\cos kx_0 + (y_0 - Y_1/2)\,(Z/\sin kx_0)\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{Z\sin kx_0}{1 - Z\cos kx_0}\right), \tag{5}$$

$$x = x_0 - Z(1 + ky_0)\sin kx_0 + (y_0 - Y_1/2)\,[Z/\sin kx_0 +$$
$$+ (Z\cos kx_0 - 1)\sin^{-2} kx_0 \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{Z\sin kx_0}{1 - Z\cos kx_0}\right)], \tag{6}$$

$$P/\rho g = y_0 + \frac{ky_0(y_0 - Y_1)}{\sin^2 kx_0}\;[\cos kx_0\left[Z - \frac{1}{\sin kx_0}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Z\sin kx_0}{1 - Z\cos kx_0}\right)\right] +$$

$$+\ \frac{Z^2\,(2\cos^2 kx_0 - Z\cos kx_0 - 2)}{1 - 2Z\cos kx_0 + Z^2} + \frac{Z^2\,(Z - \cos kx_0)^2}{(1 - 2Z\cos kx_0 + Z^2)^2}\ ]. \qquad (7)$$

Результаты расчетов по формулам (5-7) для случая $kY_1 = -0{,}01\pi$ приведены на рис. 1. Для сравнения на том же рисунке приведены результаты

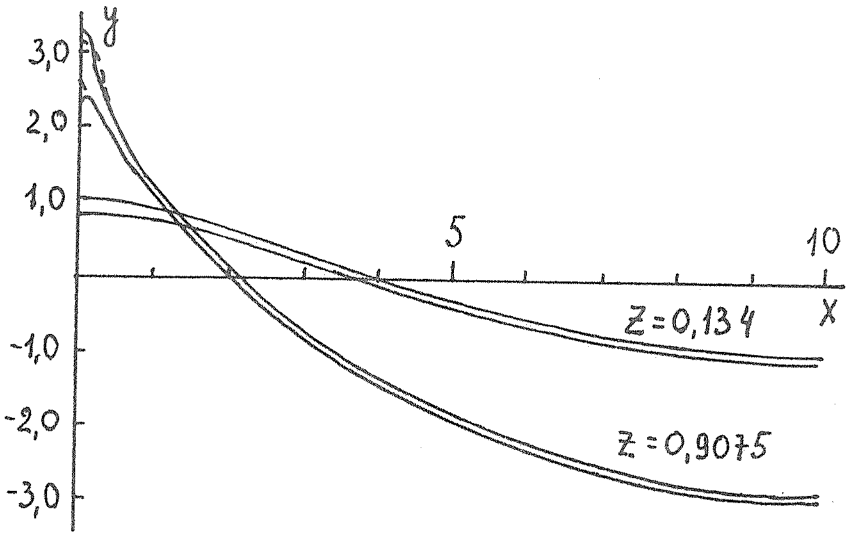
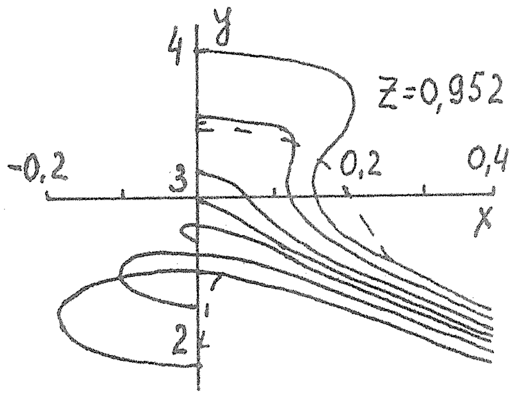
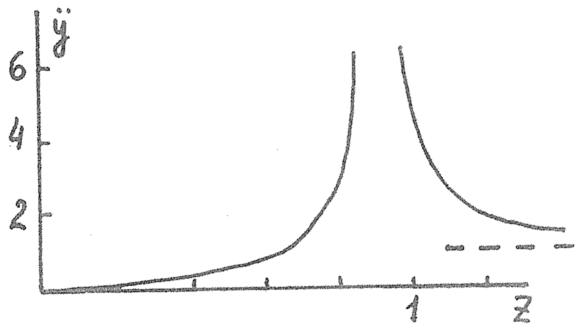


Рис. 1. Форма слоя при различных Z

численных расчетов РТ неустойчивости /4/ (пунктир). Кривые построены для $Z = 0{,}314$; $Z = 0{,}9075$. Видно достаточно хорошее согласие двух расчетов. Дальнейшее приближение Z к единице приводит к пересечению лагранжевых траекторий, что является следствием нарушения основного условия $|kY_1| \ll \ll 1$. В этом случае, как показано на рис. 2 при $Z = 0{,}952$ и x_0 близких к нулю, необходимо нахождение следующих членов разложения по малому параметру $|kY_1|$. Тем не менее видно образование кумулятивных струй при x_0 близких к нулю, что было теоретически предсказано в /3/ и численно получено в /4/. Ускорение в области "пиков" при этом становится большим и только при еще больших Z уменьшается до величины $\sim g$ (рис. 3).



Р и с. 2. Пересечение лагранжевых траекторий при Z = 0,952



Р и с. 3. Зависимость ускорения в "пике" от Z (при Z > 1 – предполагаемая)

Таким образом, в настоящей статье показано, что для описания РТ неустойчивости тонкого слоя идеальной жидкости можно получить замкнутые формулы, применимые в достаточно широкой области изменения величины Z.

Автор считает своим долгом поблагодарить за полезные обсуждения Е.Г. Гамалия, О.Н. Крохина и Ю.А. Меркульева.

Поступила в редакцию 10 февраля 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, ГИТТИ, М., 1955 г.
2. Я.И. Секерж-Зенькович, Изв. АН СССР, сер.географ. и геофиз., **15**, 57 (1951).
3. E. Ott, Phys. Rev. Lett., **29**, 1429 (1972).
4. В.А. Гасилов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 70, М., 1979 г.
5. С.А. Старцев, Препринт ФИАН, № 158, М., 1982 г.