Краткие сообщения по физике № 8-1984 г.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

В.Н. Стрельцов

УДК 534.242

Рассматривается двухчастотный режим генерации звуковых колебаний в акустическом резонаторе при периодической временной модуляции скорости звука в веществе резонатора.

В последнее время в связи с проблемой обращения волнового фронта звуковых пучков /1/ активно изучаются различные механизмы временной модуляции скорости звука в веществе с помощью внешних силовых полей. Осуществление подобной модуляции открывает возможность генерации звуковых колебаний в акустическом резонаторе. Такой процесс с одной стороны интересен с общефизической точки зрения, как довольно редкий пример параметрического возбуждения колебаний в распределенной акустической системе, а с другой стороны, благодаря высокой плотности энергии звукового поля в резонаторе, является удобным способом регистрации и измерения изменения скорости звука. В настоящей работе получены общие уравнения, описывающие при определенных ниже ограничениях динамику двухчастотной генерации в открытом акустическом резонаторе, исследован стационарный режим возбуждения и на этой основе дана оценка интенсивности колебаний компонент поля излучения в зависимости от глубины модуляции и параметров системы.

Рассмотрим плоский акустический резонатор длины L, образованный двумя жесткими поверхностями и заполненный веществом, скорость звука c в котором испытывает однородную временную модуляцию:

$$c = c_0[1 + (\Delta c/c)\cos 2\Omega t); \quad \Delta c/c \ll 1, \tag{1}$$

Заметим сразу, что при использовании для периодического изменения c электрических полей пластинами конденсатора могут служить стенки резонатора. Будем предполагать, что в резонаторе проведена селекция аксиальных типов колебаний, так что могут возбуждаться лишь колебания с наименьшим поперечным индексом. В соответствии с этим возмущение плотности ρ звукового поля в резонаторе (далее используется гидродинамическое описание) можно представить в виде разложения:

$$\rho = \Sigma \rho_l(t)\Lambda_l(r), \tag{2}$$

где $\Lambda_l(r)$ – собственные колебания поля в резонаторе:

$$\Lambda_l(r) = \cos k_l z g_{lo}(r_\perp). \tag{3}$$

Здесь функция $g_{lo}(r_\perp)$ определяет поперечное распределение поля в селектированной аксиальной моде с индексом l и зависит от геометрической формы и размеров резонатора, $k_l = \pi l/L$, ось z направлена вдоль оси резонатора. Далее будем рассматривать практически наиболее интересный случай, когда поперечные размеры резонатора намного превосходят его длину. Собственная частота ω_l, отвечающая Λ_l, при этом будет равна:

$$\omega_l \approx c_0 k_l.$$

Во избежание громоздкости будем считать также, что частота Ω в (1) точно совпадает с частотой некоторой моды l^*.

В реальных условиях (см. оценки ниже) собственные потери резонатора μ намного превосходят гидродинамическое затухание звука в заполняющем веществе, и для описания звукового поля можно использовать нелинейное уравнение Эйлера, причем для определенности будем предполагать, что основной вклад в нелинейность вносит поправка к скорости звука:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2\left(1 + 2\,\frac{\Delta c}{c}\cos 2\Omega t\right)\Delta\rho - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\,\Delta[\rho^2] = 0. \tag{4}$$

Наибольший интерес с прикладной точки зрения представляет высокодобротный резонатор, поэтому далее будем считать, что ширина линии излучения μ меньше расстояния между соседними аксиальными модами. С учетом вышесказанного в разложении (2) можно сохранить, очевидно, лишь члены с номерами $l = l^*, 2l^*, 3l^*, \ldots$. Мы ограничимся рассмотрением двух основных компонент $l^*, 2l^*$, которые далее будем нумеровать индексами 1 и 2 соответственно. Система уравнений для $\rho_l(t)$, описывающая динамику генерации в системе, близка к линейной консервативной. В соответствии с этим разложение (2) можно переписать в виде:

$$\rho = \frac{1}{2} X_1(t) e^{i\Omega t} \cos kz g_{10}(r_\perp) + \frac{1}{2} X_2(t) e^{i2\Omega t} \cos 2kz g_{20}(r_\perp) + \text{к.с.}, \tag{5}$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды, $k = \Omega/c_0$.

Подставляя (5) в (4) и проводя усреднение по быстрым осцилляциям, с учетом ортогональности функций $\Lambda_1(r)$ для коэффициентов X_1, X_2 получаем:

$$\frac{dX_1}{dt} = ia_1 X_2 X_1^* + i\nu X_1^* - \mu X_1, \quad \frac{dX_2}{dt} = ia_2 X_1^2 - \mu X_2. \tag{6}$$

Здесь

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\Delta c}{c} \Omega,$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{k^2}{\Omega} \int g_{20}(r_\perp) g_{10}^2 (r_\perp) dr_\perp / \int g_{10}^2 (r_\perp) dr_\perp,$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{k^2}{\Omega} \int g_{20}(r_\perp) g_{10}^2 (r_\perp) dr_\perp / \int g_{20}^2 (r_\perp) dr_\perp.$$

В обычных условиях $a_1 \approx a_2 = a$.

Исследуем стационарный режим, положив в (6) $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$. Положение равновесия $X_1 = X_2 = 0$, существующее в системе, как нетрудно убедиться, остается устойчивым вплоть до значения $\Delta c/c = 2\mu/\Omega$, являющегося пороговым для самовозбуждения колебаний в резонаторе. При $\Delta c/c > 2\mu/\Omega$ в системе реализуется магкий режим одновременного возбуждения рассматриваемых компонент; при этом амплитуды колебаний X_1, X_2 возрастают с увеличением $\Delta c/c$ по закону

$$X_1 = \sqrt{(\nu - \mu)\mu}/a, \quad X_2 = (\nu - \mu)/a.$$

Фазы X_1, X_2 смещены по отношению к фазе временной осцилляции скорости звука соответственно на $\pi/4$ и $\pi/2$. Таким образом, амплитуда колебаний поля компоненты с частотой 2Ω при небольших превышениях над порогом растет линейно с ростом $\Delta c/c$, в то время как для компоненты с частотой Ω аналогичный линейный рост имеет место для плотности звуковой энергии.

Сделаем теперь численные оценки. Примем $\Omega \approx 10^7$ 1/с, $c \approx 1{\cdot}10^5$ см/с, $L \approx 1$ см, $\mu \approx 10^3$ 1/с, $a \approx 10^6$ СГС. Тогда пороговое значение $\Delta c/c$ возникновения генерации оказывается равным $\Delta c/c \approx 2{\cdot}10^{-4}$. При двухкратном превышении над порогом плотность W_1 энергии звуковых колебаний на частоте Ω основной компоненты составит величину $W_1 \approx 0{,}5{\cdot}10^4$ СГС.

Поступила в редакцию 28 февраля 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.В. Бункин, Д.В. Власов, Ю.А. Кравцов, Письма в ЖТФ, 7, 325 (1981).