АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРОЙ sl(2, R)

А.Н. Лезнов, В.И. Манько, С.М. Чумаков

УДК 534.2

В рамках недавно созданного алгебраического метода построения солитонных решений нелинейных уравнений рассмотрены конкретные примеры солитонных решений, связанные с алгеброй sl (2, R).

Метод обратной задачи рассеяния, позволяющий находить солитонные решения вполне интегрируемых систем, завоевал к настоящему времени большую популярность (см., напр., /1/). Недавно был создан новый, алгебраический вариант этого метода /2, 3/, дающий определенные технические удобства. В предыдущей работе /4/ с его помощью были получены общие выражения для солитонных решений широкого класса систем, связанных с алгеброй sl(2, R). Настоящее сообщение посвящено рассмотрению некоторых конкретных примеров систем, связанных с этой простейшей алгеброй.

Отправной точкой для метода обратной задачи является представление нелинейного уравнения (системы уравнений) в виде L-A-пары Лакса, т.е. как условия совместности системы линейных уравнений:

$$\dot{g} \equiv \frac{dg}{dz} = Ug \equiv \begin{bmatrix} U_0 & U_+ \\ U_- & -U_0 \end{bmatrix} g, \quad g' \equiv \frac{dg}{d\bar{z}} = Vg \equiv \begin{bmatrix} V_0 & V_+ \\ V_- & -V_0 \end{bmatrix} g. \tag{1}$$

Здесь функции g(U,V) независимых переменных z, $\bar{z}$ принимают значения в группе (алгебре) sl(2,R). Равенство смешанных производных в (1) приводит к условию совместности

$$U' - \dot{V} + [U,V] = 0. \tag{2}$$

Если предположить, что U и V зависят некоторым (рациональным) образом от спектрального параметра λ, и потребовать выполнения (1), (2) при всех значениях λ, то после приравнивания коэффициентов разложения по λ условие (2) приводит к исследуемой системе нелинейных уравнений.

Рассмотрим отдельно одно из уравнений (1). Можно показать /2 - 4/, что матрица g, ему удовлетворяющая, выражается через элементы своей верхней строки $g_{11} \equiv \Psi_1$, $g_{12} \equiv \Psi_2$, а функции Ψ_1, Ψ_2 являются фундаментальными решениями следующего обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\ddot{\Psi} - \frac{\dot{U}_+}{U_+}\dot{\Psi} = [U_+ (\frac{U_0}{U_+})^{\cdot} + U_0^2 + U_+U_-]\Psi, \qquad (3)$$

которое мы будем называть спектральным. Аналогичное рассмотрение справедливо и для другой независимой переменной.

Приведем без доказательства (см. доказательство аналогичных формул в /4/) выражения для солитонных решений системы (2) в случае произвольной рациональной зависимости U, V от λ.

Предположим, что функции Ψ_1, Ψ_2 имеют вид:

$$\Psi_1 = e^{\Phi} \prod_{i=1}^{N_1} (a_i - \lambda), \quad \Psi_2 = e^{-\Phi} \prod_{j=1}^{N_2} (b_j - \lambda),$$

$$\Phi \equiv \varphi(\lambda) + \bar{\varphi}(\lambda) + f, \qquad (4)$$

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{\varphi_\alpha^s(z)}{(\lambda - \mu_\alpha)^s} + \sum_{s=1}^{n+1} \varphi_s(z)\lambda^s, \quad \bar{\varphi}(\lambda) = \sum_{\beta=1}^{\bar{M}} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\beta} \frac{\bar{\varphi}_\beta^t(\bar{z})}{(\lambda - \nu_\beta)^t} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{\bar{n}+1} \bar{\varphi}_t(\bar{z})\lambda^t,$$

здесь $\varphi_\alpha^s, \varphi_s, \bar{\varphi}_\beta^t, \bar{\varphi}_t$ – произвольные функции соответственно z и $\bar{z}$. Независимые от λ функции $f(z,\bar{z})$, $a_i(z,\bar{z})$, $b_j(z,\bar{z})$ определяются из условия линейной зависимости Ψ_1 и Ψ_2 в $N_1 + N_2 + 1$ точках λ-плоскости:

$$\Psi_1 + C(\lambda)\Psi_2 |_{\lambda=\lambda_s} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant N_1 + N_2 + 1. \qquad (5)$$

После подстановки (4) условия (5) превращаются в систему линейных алгебраических уравнений относительно функции e^f и элементарных симметрических функций, составленных из a_i (b_j). Выражения для элементов матрицы U, соответствующие солитонным решениям, имеют вид

$$U_+ = \frac{\prod_{i=1}^{N_1}(a_i - \lambda) \prod_{j=1}^{N_2} (b_j - \lambda)}{-2P(\lambda)} \left\{ -2\dot{\Phi} + \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\dot{b}_j}{b_j - \lambda} - \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\dot{a}_i}{a_i - \lambda} \right\},$$

$$P(\lambda) \equiv \prod_{s=1}^{N_1+N_2+1} (\lambda_s - \lambda),$$

$$U_0 = \dot{\Phi} + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i}{U_+(a_i)} \left\{ \frac{U_+(a_i) - U_+(\lambda)}{a_i - \lambda} \right\}, \quad U_+(a_i) \equiv U_+(\lambda)\Big|_{\lambda=a_i},$$

$$\dot{\varphi}(a_i) \equiv \dot{\varphi}(\lambda)\Big|_{\lambda=a_i}, \tag{6}$$

$$U_- = 2 \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i}{U_+(a_i)} \left[\frac{\dot{\varphi}(\lambda) - \dot{\varphi}(a_i)}{a_i - \lambda} \right] + \sum_{i,j=1}^{N_1} \frac{\dot{a}_i \dot{a}_j}{U_+(a_i)\, U_+(a_j)\, (a_1 - \lambda)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{U_+(a_j) - U_+(\lambda)}{a_j - \lambda} - \frac{U_+(a_j) - U_+(\lambda)}{a_j - a_i} \right\}.$$

Здесь λ_s, $1 \leqslant s \leqslant N_1 + N_2 + 1$ – различные комплексные числа. Выражения для элементов матрицы V получаются из (6) при помощи замены: $U \to V$, $\dot{} \to {}'$, $\varphi \to \bar{\varphi}$. Легко заметить, что, в силу симметрии компонент U, V относительно любых перестановок величин a_i (b_j), они выражаются через элементарные симметрические функции, составленные из a_i (b_j). Таким образом, формулы (6), (5) явно задают солитонные решения системы (2). Приведем здесь полезную в дальнейшем систему уравнений 2-го порядка, которым удовлетворяют функции a_i (ее справедливость проще всего доказать подстановкой функций Ψ_1 в спектральное уравнение (3)):

$$\ddot{a}_i + 2\dot{\Phi}(a_i) + 2\dot{a}_i \sum_{j \neq i} \frac{\dot{a}_j}{a_j - a_i} = \frac{\dot{U}_+(a_i)}{U_+(a_i)}\, \dot{a}_i. \tag{7}$$

В рассмотренных ниже случаях (а) – (б) мы потребуем дополнительной инвариантности спектрального уравнения (3) относительно преобразования $\lambda \to -\lambda$. Тогда $N_1 = N_2 \equiv N$, $\Psi_2 = \Psi_1(-\lambda)$.

а) Возьмем $\underline{\Phi = \lambda z + \bar{\varphi}(\lambda)}$, $\bar{\varphi}(\lambda) = \lambda^3 \bar{z}$ и $\Psi_1 = \exp\Phi \prod_{i=1}^{N} (a_i - \lambda)$, $\Psi_2 = \exp(-\Phi) \prod_{i=1}^{N} (a_i + \lambda)$. Функции Ψ_1 и Ψ_2 линейно зависимы при $\lambda = 0$, поэтому следует взять $P(\lambda) = \lambda \prod_{s=1}^{N} (\lambda_s^2 - \lambda^2)$ (произведение содержит лишь четные степени λ в силу требуемой инвариантности). Из формул (6) получаем: $U_+ = 1$, $U_0 = \lambda$, $U_- = -2\Sigma\dot{a}_i$, $V_+ = \lambda^2 + \Sigma\dot{a}_i$, $V_0 = \lambda^3 + \lambda\Sigma\dot{a}_i + \Sigma\dot{a}_i a_i$,

$V_- = -2\Sigma\mathring{a}_i(a_i^2 + \lambda a_i + \lambda^2) - (\Sigma\mathring{a}_i)^2$. Из системы (7) следует, что все "моменты" $J_m \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathring{a}_i a_i^m$ выражаются через нулевой момент $J_0 \equiv \sum_i \mathring{a}_i \equiv u$ и его производные до n-го порядка включительно: $J_1 \equiv \Sigma\mathring{a}_i a_i = -\mathring{u}/2$, $J_2 \equiv \Sigma\mathring{a}_i a_i^2 = \ddot{u}/4 + u^2/2$ и т. д. Подстановка U и V в (2) теперь приводит к уравнению КдФ:

$$-2u' + \dddot{u}/2 + 6u\mathring{u} = 0. \tag{8}$$

Аналогично, любая полиномиальная зависимость $\bar{\varphi}(\lambda)$, такая, что $\bar{\varphi}(-\lambda) = -\bar{\varphi}(\lambda)$, приводит к уравнению типа (8). Такие уравнения называются уравнениями КдФ высших порядков.

б) $\Phi = \lambda z + \lambda^{-1}\bar{z}$. Компоненты U не изменяются, компоненты V имеют вид:

$$V_+ = \lambda^{-2}(1 + \Sigma\mathring{a}_i a_i^{-2})^{-1} = \lambda^{-2}\prod_i a_i^2/\prod_s \lambda_s^2 = \lambda^{-2}(1 - \Sigma a_i') \equiv \lambda^{-2}e^{2\rho},$$

$$V_0 = \lambda^{-1}e^{2\rho}(1 - \mathring{\rho}\lambda^{-1}),\ V_- = \lambda^{-1}e^{2\rho}(2\mathring{\rho} - \mathring{\rho}^2\lambda^{-1}).$$

Подставляя U и V в (2), приходим к соотношению $(e^{4\rho} - \mathring{\rho}'e^{2\rho})^{\circ} = 0$, которое сводится к уравнению sin-Гордона $\mathring{\rho}' = e^{2\rho} - e^{-2\rho}$ (отметим, что из системы (5), определяющей функцию ρ, следует, что $\rho \to 0$ при $z \to \pm\infty$).

В примерах (в), (г) инвариантность отсутствует, Φ имеет нулевую компоненту f и функции Ψ_1, Ψ_2 задаются согласно (4).

в) $\Phi = \lambda z + \lambda^2\bar{z} + f$,

$$U_+ = 1,\ U_0 = \lambda + \mathring{f},\ U_- = -2u,\ (u \equiv \Sigma\mathring{a}_i),$$

$$V_+ = \lambda - \mathring{f},\ V_0 = \lambda^2 + f' + u,\ V_- = -2\lambda u + \mathring{u} + 2\mathring{f}u.$$

Соответствующая система

$$2u = \ddot{f} - 2\mathring{f}^2 - 2f',\ \ddot{u} + 4\ddot{f}u + 4\mathring{f}\mathring{u} + 2u' = 0$$

заменой $u \equiv -q^2/2$, $r \equiv e^{-2f}$ сводится к нелинейному уравнению Шредингера:

$$r' - \ddot{r}/2 - qr^2 = 0,\ q' - \ddot{q}/2 - q^2 r = 0.$$

г) $\Phi = \lambda z + \lambda^{-1}\bar{z} + f$. Обозначим $u \equiv \Sigma\mathring{a}_i$, $x \equiv \Sigma\mathring{a}_i/a_i$, $U_+ = 1$, $U_0 = \lambda + \mathring{f}$,

$U_- = -2u$, $V_+ = \lambda^{-1} f'$, $V_0 = f' + \lambda^{-1}(1 - f'x)$, $V_- = \lambda^{-1}(2x - f'x^2)$. Соответствующая система уравнений

$$-2u = \dot{x} + x^2 + 2\dot{f}x,\ 2f'x = \dot{f}' - 2\dot{f}f' + 2,\ u' + 2uf' + 2x = f'x^2$$

заменой переменных может быть сведена к системе Полмейера – Лунда – Редже, связанной с O(4)-инвариантной σ-моделью. Как видно из предыдущего рассмотрения, задание затравочной функции Ф, диктуемое симметрийными соображениями, определяет согласно формулам (6), (5) матрицы L–A-пары вполне интегрируемой системы, что приводит как к уравнениям, описывающим исследуемую систему, так и к их решениям солитонного типа.

Поступила в редакцию 7 мая 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Е. Захаров и др., Теория солитонов, "Наука", М., 1980 г.
2. А.Н. Лезнов, ТМФ, 57, 156 (1984).
3. A.N. Lesnov, in Proc. II Conf. on Non–linear Processes in Physics and Tur–bulence, Kiev, 1983, Gordon and Breach, 1984.
4. А.Н. Лезнов, В. И. Манько, С.М. Чумаков, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 28 (1984).