Краткие сообщения по физике № 10-1984 г.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ

С.В. Сережников

УДК 539.12.523.34

В рамках приближений "прямо-вперед" и постоянного полного сечения получено асимптотическое решение уравнения переноса с произвольной индикатрисой рассеяния.

Ряд задач о распространении высокоэнергетических адронов и жестких гамма-квантов в веществе приближенно могут быть сведены к уравнению переноса без угловой зависимости*) (так называемое приближение "прямо-вперед") с полным сечением взаимодействия частиц, не зависящим от энергии

$$\frac{\partial G(z,E)}{\partial z} + \Sigma_t G(z,E) = \int\limits_E^{E_0} dE' \Sigma_s(E') K(E' \to E) G(z,E') + \delta(z)\,\delta(E - E_0). \quad (1)$$

Здесь $G(z, E)$ – функция распределения по энергии E плотности потока частиц на расстоянии z от мононаправленного моноэнергетического источника с энергией E_0; Σ_t – полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц со средой; $\Sigma_s(E')$ – макроскопическое сечение рассеяния частиц с энергией E'; $K(E' \to E)$ – индикатриса рассеяния, т. е. число вторичных частиц в единичном интервале энергии вблизи E, возникающих при рассеянии частицы с энергией E'.

Уравнение (1) решалось аналитически во многих работах (см., напр., /1–4/) для различных зависимостей $K(E' \to E)$ от E', E. В данной работе получено решение уравнения (1) при больших z для индикатрисы $K(E' \to E)$ произвольного вида и рассмотрены его некоторые общие свойства.

---

*) При этом считается, что акты рассеяния не изменяют направление движения частиц, которое, таким образом, совпадает с направлением движения частиц, испускаемых источником.

Перейдем к безразмерной переменной $s = \Sigma_t z$ и представим $G(s, E)$ в виде $G(s, E) = \delta(E - E_0)\Theta(s)e^{-s} + \Phi(s, E)$, где $\Theta(x) = (x + |x|)/2$. Тогда, преобразуя уравнение (1) по Лапласу относительно s, получим

$$q\widetilde{\Phi}(p, E) = \int\limits_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma_t} K(E' \to E)\widetilde{\Phi}(p, E') + \frac{1}{q}\frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma_t} K(E_0 \to E). \tag{2}$$

Здесь $\widetilde{\Phi}(p, E) = \int\limits_0^\infty ds e^{-ps}\Phi(s, E)$, $q = p + 1$. Без ограничения общности индикатрису рассеяния $K(E' \to E)$ можно представить в следующем виде:

$$K(E' \to E) = \sum_{m=0}^{N} \eta_m(E')(E - E')^m/m!, \quad \eta_m(E') = \frac{\partial^m}{\partial E^m} K(E' \to E)\Big|_{E=E'}, \tag{3}$$

где N – целое сколь угодно большое положительное число. Подставляя (3) в уравнение (2) и дифференцируя его по E N+1 раз, получим дифференциальное уравнение N+1-го порядка для $\widetilde{\Phi}(p, E)$

$$q\frac{\partial^{N+1}\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^{N+1}} + \chi_N^0(E)\frac{\partial^N\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^N} + \chi_N^1(E)\frac{\partial^{N-1}\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^{N-1}} + \ldots$$

$$+ \chi_N^N(E)\widetilde{\Phi}(p,E) = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial^m\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^m}\Big|_{E=E_0} = \frac{\widetilde{\eta}_m(E_0)}{q^2} - \frac{\chi_{m-1}^0(E_0)}{q}\frac{\partial^{m-1}\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^{m-1}}\Big|_{E=E_0} -$$

$$- \frac{\chi_{m-1}^1(E_0)}{q}\frac{\partial^{m-2}\widetilde{\Phi}(p,E)}{\partial E^{m-2}}\Big|_{E=E_0} - \ldots - \frac{1}{q}\chi_{m-1}^{m-1}(E_0)\widetilde{\Phi}(p,E_0),$$

$$m = 0, 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Здесь

$$\chi_j^i(E) = \sum_{k=0}^{i} \binom{j-k}{i-k} \tilde{\eta}_k^{(i-k)}(E), \; j = 0, 1, \ldots, N; \; i = 0, 1, \ldots, j,$$

$\tilde{\eta}_k^{(l)}(E) = \partial^l \tilde{\eta}_k(E)/\partial E^l$, $\tilde{\eta}_k(E) = \eta_k(E)\,\Sigma_s(E)/\Sigma_t$, $\binom{l}{n}$ число перестановок из l по n.

Как известно (см. напр., /5,6/), поведение функции распределения (когда она задается уравнением вида (1)) при больших s определяется особенностью образа Лапласа этой функции в точке $p = -1$, т. е. при $q = 0$. Но при малых q решение уравнения (4), как легко проверить, можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}(p,E) = C(q)\, e^{f(q,E)} + F(q, E), \tag{6}$$

где $f(q,E) = g_0(E)/q + g_1(E) + q g_2(E) + O(q^2)$, $g_i(E)$, $C(q)$ – некоторые функции, подлежащие определению, а $F(q,E)$ – функция, аналитическая в точке $q = 0$ и, следовательно, не влияющая на асимптотику $\Phi(s,E)$.

Подставляя (6) в уравнение (4) и группируя коэффициенты при одинаковых степенях q, получаем

$$g_0(E) = -\int dE\,\tilde{\eta}_0(E), \quad g_1(E) = \int dE\,\tilde{\eta}_1(E)/\tilde{\eta}_0(E), \tag{7}$$

$$g_2(E) = \int dE[\tilde{\eta}_1^2(E) - \tilde{\eta}_0(E)\tilde{\eta}_2(E) + \tilde{\eta}_0(E)\eta_1^{(1)}(E) - \tilde{\eta}_0^{(1)}(E)\tilde{\eta}_1(E)]/\tilde{\eta}_0^3(E). \tag{8}$$

Коэффициент $C(q)$ находим, подставляя (6) в граничное условие (5) при $m = 0$:

$$C(q) = [\tilde{\eta}_0(E_0)/q^2](1 + O(q^2)). \tag{9}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа функции $\tilde{\Phi}(p,E)$ в виде (6) с учетом (7) – (9), для больших s получаем (члены более высокого порядка малости, опущены)

$$\Phi(s,E) = e^{-s-\mu_1(E,E_0)}\tilde{\eta}_0(E_0)\sqrt{s/\mu_0(E,E_0)}\,[I_1(2\sqrt{\mu_0(E,E_0)s}) -$$

$$- \mu_2(E,E_0)\sqrt{\mu_0(E,E_0)/s}\,I_0(2\sqrt{\mu_0(E,E_0)s}) + \ldots], \tag{10}$$

где

$$\mu_0(E,E_0)=\int\limits_E^{E_0} dx\widetilde{\eta}_0(x),\quad \mu_1(E,E_0)=\int\limits_E^{E_0} dx\,\widetilde{\eta}_1(x)/\widetilde{\eta}_0(x),$$

$$\mu_2(E,E_0)=\int\limits_E^{E_0} dx[\widetilde{\eta}_1^2(x)-\widetilde{\eta}_0(x)\widetilde{\eta}_2(x)+\widetilde{\eta}_0(x)\widetilde{\eta}_1^{(1)}(x)-$$
$$-\widetilde{\eta}_0^{(1)}(x)\widetilde{\eta}_1(x)]/\widetilde{\eta}_0^3(x),$$

$I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя ν-го порядка.

Выражение (10) применимо (т. е. s можно считать достаточно большим), когда второй член в его правой части, который следует рассматривать как поправку, много меньше первого. Это накладывает на величину $s=\Sigma_t z$ следующие условия:

$$\sqrt{s}\gg|\mu_2(E,E_0)|\sqrt{\mu_0(E,E_0)}\ \text{при}\ s\gg 1/\mu_0(E,E_0), \tag{11}$$

$$s\gg|\mu_2(E,E_0)|\ \text{при}\ s\ll 1/\mu_0(E,E_0). \tag{12}$$

При выполнении условия $s\gg 1/\mu_0(E,E_0)$ выражение (10) можно переписать в виде, позволяющем наглядно представить порядок отброшенных членов:

$$\Phi(s,E)=\exp[-s+2\sqrt{\mu_0(E,E_0)s}-\mu_1(E,E_0)]\widetilde{\eta}_0(E_0)\ \frac{s^{1/4}}{2\sqrt{\pi}\ \mu_0^{3/2}\ (E,E_0)}\times$$

$$\times[1-\mu_2(E,E_0)\sqrt{\mu_0(E,E_0)/s}+O(1/s)].$$

Как видно из (10), на больших (в смысле (11), (12)) расстояниях от источника функция распределения плотности потока частиц практически не зависит от коэффициентов $\eta_m(E')$ $(m=2,3,\ldots,N)$ разложения (3) индикатрисы $K(E'\to E)$. Существенными оказываются лишь коэффициенты $\eta_0(E')$ и $\eta_1(E')$, определяющие поведение $K(E'\to E)$ при $E\sim E'$. Качественно этот результат можно понять следующим образом. С ростом расстояния z растет среднее число взаимодействий, испытываемых частицей на пути от источника до точки z. При этом, если величина энергии E фиксирована, средняя потеря энергии в одном акте взаимодействия становится тем меньше, чем больше z. Следовательно, при больших z вид функции распределения плотности потока частиц определяется свойствами индикатрисы $K(E'\to E)$ при малых $E'-E$, что и приводит к полученному результату.

Следует отметить, что качественно полученные результаты распространяются и на случай переноса частиц с учетом угловых отклонений. Действительно, пренебрежение угловыми отклонениями частиц в элементарных актах взаимодействия эффективно увеличивает вероятность удаления частиц низких (относительно энергии первичной частицы) энергий на большие расстояния от источника. Тем самым в приближении "прямо-вперед" роль коэффициентов $\eta_2(E')$, ..., $\eta_N(E')$, описывающих поведение индикатрисы при достаточно больших $E' - E$, оказывается завышенной. Поэтому учет угловых отклонений должен привести к еще более сильному подавлению зависимости функции распределения плотности потока от $\eta_i(E')$ ($i = 2, 3, ..., N$) при больших z.

Автор благодарит М.В. Казарновского за обсуждения и полезные замечания.

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию

25 мая 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Passow, Desy Notiz, **A2**, 85 (1962).
2. М.М. Комочков, Б.С. Сычев, Атомная энергия, **12**, 325 (1963).
3. В.П. Жемчугов, Атомная энергия, **50**, 143 (1981).
4. Д.А. Кожевников, Атомная энергия, **46**, 178 (1979).
5. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов. Атомиздат, М., 1960 г.
6. У. Фано и др., Перенос гамма-излучения. Госатомиздат, М., 1963 г.