

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МАЗЕРОВ

А. А. Норвайшас, К. В. Владимирский

УДК 534.1

Исследуются немонохроматические решения интегродифференциальных уравнений динамики ядерного зеемановского лазера. Предполагается, что лазер работает на неоднородно уширенной линии, которая характеризуется произвольным распределением резонансных частот.

В работах /1,2/ исследовались предельные циклы и стохастические решения уравнений динамики ядерного зеемановского лазера, работающего на неоднородно уширенной линии. Рассматривалась простейшая модель неоднородного уширения — симметричная раздвоенная линия. Предполагалось, что процессы в веществе определяются уравнениями Блоха /3/ и что добротность линий я.м.р. значительно выше добротности резонатора. Динамика лазера определяется в этом случае нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Эти уравнения соответствуют физически реализуемой модели неоднородного уширения, их решения могут быть непосредственно сопоставлены с результатами экспериментальных исследований. Однако наибольший интерес представляет исследование задачи в более общей постановке, для рабочего вещества, которое характеризуется произвольным непрерывным набором резонансных частот. Соответствующие уравнения имеют вид /4/

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + p - hq - kr\bar{p} &= 0, \\ \frac{dq}{dt} + q + hp - kr\bar{q} &= 0, \\ \frac{dr}{dt} + r + k(p\bar{p} + q\bar{q}) &= 1. \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — безразмерные компоненты вектора ядерной намагниченности,  $h$  — расстройка резонансной частоты,  $k$  — коэффициент усиления в петле обратной связи,

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} p(h)g(h)dh, \quad \bar{q} = \int_{-\infty}^{\infty} q(h)g(h)dh,$$

$g(h) = g(h, \delta)$  — форм-функция, характеризующая неоднородное уширение,  $\delta$  — параметр подобия, полуширина распределения резонансных частот рабочего вещества, отнесенная к половине естественной, релаксационной ширины линии.

Число степеней свободы системы (1) бесконечно, для ее исследования необходим подход, выделяющий степени свободы, существенные для динамики лазера. В настоящей работе, как и в исследованиях устойчивости монохроматических решений [4, 5], используется метод моментов, т.е. уравнения в переменных вида

$$x_i = \delta^{-i} \int_{-\infty}^{\infty} h^i p(h)g(h)dh.$$

Конечные, обрывающиеся системы порядка  $3n$

$$\frac{dx_i}{dt} + x_i - \delta y_{i+1} - kx_0 z_i = 0,$$

$$\frac{dy_i}{dt} + y_i + \delta x_{i+1} - ky_0 z_i = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dz_i}{dt} + z_i + k(x_0 x_i + y_0 y_i) = m_i,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

получаются, если использовать квадратурные формулы Гаусса, рассматривая  $g(h)$  как весовую функцию. Здесь  $m_i$  — моменты форм-функции  $g(h)$ . Замкнутость системы (2) обеспечивается существованием тождественных соотношений между моментами, вычисленными с использованием конечного числа абсцисс.

Уравнения, рассмотренные в работах [1, 2], являются частным случаем системы (2), первым нетривиальным приближением в исследовании эффектов неоднородного уширения для произвольной четной форм-функции  $g(h)$ . В настоящей работе это исследование

распространено на более точные системы уравнений, построенные для  $n = 3, 4, 5$ . Основная цель — показать, что в определенной области значений параметров  $k, \delta$  уравнения (2) дают реальную возможность исследовать нестационарные решения уравнений (1), оперируя конечным числом степеней свободы. Область применимости этого подхода очевидна из качественных соображений /4,5/: зависимости величин  $p, q, r$  от параметра расстройки  $h$  имеют более плавный ход в сильных радиочастотных полях. Для оценок можно использовать точные решения уравнений (1) — монохроматические решения

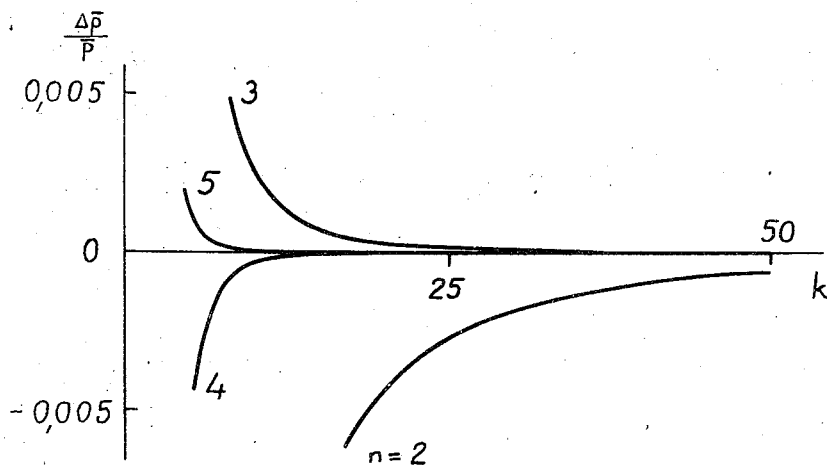
$$p = \frac{s}{1 + s^2 + h^2}, \quad \frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(h)dh}{1 + s^2 + h^2}.$$

Здесь  $s = k\bar{r}$  — безразмерная напряженность радиочастотного поля в резонаторе. На рис. 1 показана относительная ошибка приближенных значений величины  $\bar{r}$  для  $5 < k < 50, \delta^2 = 6, n = 2, 3, 4, 5$ ; виден асимптотический характер получаемых приближений при  $k \gg 1$ . В качестве модели неоднородного уширения здесь и далее принята форм-функция

$$g(h) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & (|h| \leq \delta) \\ 0 & (|h| > \delta). \end{cases} \quad (3)$$

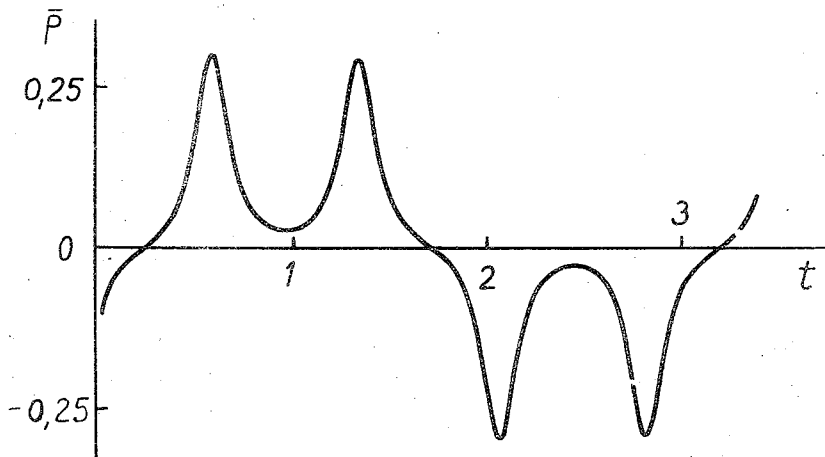
Для исследования нестационарных режимов использовалось численное решение уравнений (2). Вычисления проводились для  $n = 2, 3, 4, 5$ , т.е. решались системы 6, 9, 12, 15 порядка. Как и в исследованном в работах /1,2/ случае  $n = 2$ , получены предельные циклы различной сложности и стохастические решения, существование и устойчивость которых сложным образом зависит от значений параметров  $k, \delta$ . Составление решений, относящихся к одинаковым значениям  $k, \delta$  и различным  $n$ , проводилось для значений  $k$  не менее нескольких десятков, где это только и имеет смысл по указанным выше причинам.

Общий результат вычислений подтвердил эффективность метода моментов. Получены предельные циклы и стохастические решения, практически тождественные для  $n = 2, 3, 4, 5$ . Можно считать, таким образом, что проведенные ранее исследования системы шестого



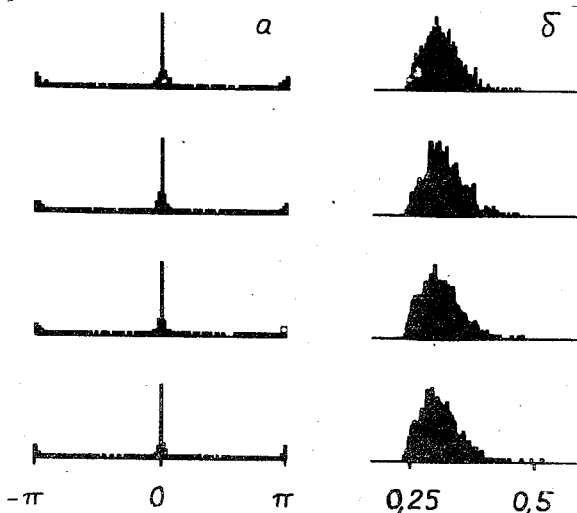
Р и с. 1. Оценки точности приближений для  $n = 2, 3, 4, 5$ .

порядка дали правильную классификацию решений системы (I) для области сильных радиочастотных полей. Наибольшие расхождения в решениях наблюдались для значений  $k, \delta$  близких к границам существования того или иного типа решений, что естественно.



Р и с. 2. Предельный цикл уравнений (I)

На рис. 2 приведен пример предельного цикла, вычисленного для  $k = 50$ ,  $\delta^2 = 12$ . Результаты вычислений для  $n = 2, 3, 4, 5$  практически совпадают, расхождения получаются порядка толщины линии на чертеже. Представление о точности вычислений и о характере сходимости дают значения периода процесса 2,9212; 2,9486; 2,9500; 2,9501, соответственно, для  $n = 2, 3, 4, 5$ . Предельный цикл рис. 2 принадлежит к отмеченным ранее /1/ решениям типа амплитудной самомодуляции. Среди решений системы (2) эти решения выделяются равными нулю нечетными моментами  $z_1, z_3, \dots$  продольной составляющей ядерной намагниченности.



Р и с. 3. Вероятности появления заданных значений  $\Delta\varphi$  (а) и амплитуды радиочастотного поля (б) в относительных единицах

Стохастические решения исследовались также численно. Методы диагностики типов решений были применены те же, что и в работе /2/ - регистрировались изменения фазы колебаний  $\Delta\varphi$  от вспышки до вспышки. Помимо этого строились гистограммы распределения амплитуд радиочастотного поля в максимуме, в момент наибольшего "разгорания" вспышки. Пример результатов исследования стохастического решения приведен на рис. 3. Решение относится

к отмеченному в /2/ типу метастабильной амплитудной самомодуляции — фаза радиочастотного поля в течение значительной части времени остается почти постоянной, но это движение неустойчиво, перемежается вспышками сложного многомерного движения. Движения, близкие к амплитудной самомодуляции, выделяются, как и в случае предельных пиков, малыми, порядка  $10^{-3}$  —  $10^{-4}$ , значениями нечетных моментов.

Помимо форм-функции (3) исследовалась также гауссова форм-функция. Сравнение решений показало, что в области сильных радиочастотных полей вид решений практически полностью определяется значениями второго момента форм-функции.

Поступила в редакцию  
27 июля 1982 г.

#### Л и т е р а т у р а

1. К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН № 12, 3 (1980).
2. К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН № 1, 19 (1982); ДАН, 263, № 2, 328 (1982).
3. F. Bloch, Phys. Rev., 70, 460 (1946).
4. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике ФИАН № 10, 41 (1971); № 3, 47 (1972).
5. К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН № 7, 16 (1977); № 10, 37 (1977).