Краткие сообщения по физике № 1 1983

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СОЛИТОНА В ПОЛЕ РЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Ф. Х. Абдуллаев

УДК 530.I:539.2

Рассмотрено движение солитонов уравнения Sin-Gordon и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в поле регулярного волнового пакета. Найдены условия, при которых движение солитонов приобретает броуновский характер.

В последние годы уделяется большое внимание исследованию динамики солитонов под действием стохастических возмущений /I-3/. Как показано в работе /4/, учет нелинейных эффектов при взаимодействии солитона с гармониками случайного волнового пакета приводит к броуновскому движению солитона.

В настоящей работе показано, что движение солитона уравнения Sin-Gordon и НУШ в поле регулярного волнового пакета при определенных соотношениях между параметрами солитона и пакета может иметь броуновский характер.

Рассмотрим вначале динамику солитона уравнения Sin-Gordon в поле волнового пакета. Исходное волновое уравнение имеет вид

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{zz} + \sin\varphi = \varepsilon \sum_k \Big[E_k \exp\big[i(kz - \omega_k\tau)\big] + E_{-k}\exp\big[-i(kz - \omega_k\tau)\big]\Big], \quad E_k^* = E_{-k}. \tag{I}$$

Уравнение записано в стандартном обезразмеренном виде, т.е. $k = k_0 d$, $\omega_k = \omega_k^{(0)}/\omega_0$, $E_k = E_k^{(0)}/\omega_0^2$, $d = c_0/\omega_0$.

Представляя поле φ в виде

$$\varphi = 4\operatorname{arctg} \exp\left\{\frac{\left[z - z_0(\tau) - \int\limits_0^\tau \beta(\tau')d\tau'\right]}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}}\right\},$$

выпишем уравнения движения для скорости β и координаты центра масс солитона z. Используя метод работ /5,6/, имеем

$$\frac{d\beta}{d\tau} = (\varepsilon/4)(1-\beta^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_k\left[E_k\exp\left[i(kz-\omega_k\tau)\right] + \text{k. c.}\right]\operatorname{sech}\Theta dz, \tag{2}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \beta(\tau) + (\varepsilon/4)\beta(1-\beta^2)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_k\left[E_k\exp\left[i(kz-\omega_k\tau)\right] + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \text{ k. c.}\right]\Theta\operatorname{sech}\Theta dz.$$

Здесь

$$\Theta = z - z_0 - \int\limits_0^\tau \beta(\tau')d\tau'.$$

Рассмотрим далее случай малых скоростей $\beta^2 \ll 1$. Из уравнения (2) находим

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{4}\sum_k\left[A_kE_k\exp\left[i(kz(\tau)-\omega_k\tau)\right] + \text{k. c.}\right], \tag{4}$$

$$A_k = \pi/\operatorname{ch}(\pi k/2).$$

Подставим уравнение (4) в (3) и пренебрежем членами $\sim\varepsilon^2$. Получаем следующее уравнение для координаты центра масс:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{\varepsilon}{4}\sum_k\left[A_kE_k\exp\left[i(kz(\tau)-\omega_k\tau)\right] + \text{k. c.}\right].$$

Это уравнение справедливо при $\beta^2 \ll 1$. Оно совпадает с уравнением движения классической частицы в поле волнового пакета. Используя результаты работы /7/, можно найти области параметров, где движение солитона становится стохастическим. Начнем рассмотрение с того случая, когда солитон захвачен какой-либо гармоникой пакета. Тогда для солитона образуется эргодический слой, ширина которого по частоте будет порядка $1/\tau_k = (\varepsilon A_k E_k/4)^{1/2}$. Накладывая условие слияния эргодических слоев, оценим стохастическую область, где движение солитона происходит случайным образом. Имеем условие

$$\tau_k \Omega_k = \Omega_k (4/\varepsilon A_k E_k)^{1/2} \ll 1, \tag{5}$$

где частота

$$\Omega_k = \omega\left[k + \Delta k(\beta)\right] - \omega(k) = \Delta k(\beta - d\omega/dk)$$

является медленно меняющейся функцией k. Уравнение для функции распределения солитонов по скоростям $F(\beta,\tau)$ в стохастической области имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 2\,\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_k \left(\frac{\varepsilon A_k E_k}{4}\right)^2 \frac{\tau_r}{1 + \omega_k^2(\beta)\tau_r^2}\,\frac{\partial F}{\partial \beta}, \tag{6}$$

где τ_r – время расцепления корреляций фаз, следующим образом связанное с параметрами солитона и пакета:

$$\tau_r^{-1} = \tau^{-1}\ln(1/\tau\Omega), \quad \tau = \langle \tau_k \rangle .$$

Из (6) следует, что средняя энергия солитона нарастает со временем, т.е. происходит стохастическое ускорение.

Рассмотрим также динамику солитонов нелинейного уравнения Шредингера в поле пакета. Такого рода задачи возникают, например, при изучении действия лазерного импульса на солитоны в молекулярных кристаллах /3/. Исходное уравнение имеет вид

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2q^* = \varepsilon \sum_k \left(E_k^{(1)} \exp\left[-i(k_1x - \omega_k^{(1)}t)\right] + \text{к. с.}\right)q.$$

При $\varepsilon = 0$ оно имеет односолитонное решение

$$q(x,t) = 2\eta \exp\left[-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t + i\varphi_0\right] / \operatorname{ch} 2\eta(x - \bar{x} + 4\xi t).$$

При $\varepsilon \neq 0$ получаем следующее уравнение для координаты центра масс солитона $\bar{x}$:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 4\varepsilon\eta^2\left[\sum_k E_k^{(1)}\exp\left[-i(k_1\bar{x} - \omega_k^{(1)}t)\right] + k.\ c.\right]C\left(\frac{k_1}{2\eta}\right),$$

$$C\left(\frac{k_1}{2\eta}\right) = \frac{k_1^2}{16\eta^3 \operatorname{sh}(\pi k_1/2\eta)}.$$

Оценим условия, при которых возникает стохастизация движения солитона. Применяя снова принцип слияния всех эргодических слоев, находим область перемешивания траекторий

$$\tau_1\Omega_{k_1} = \Omega_{k_1}(4\varepsilon\eta^2 E_{k_1}^{(1)} C_{k_1})^{-1/2} \ll 1.$$

В случае больших амплитуд солитона $(\eta \gg 1)$ это неравенство выполняется почти для всех k_1. Внутри области, образованной слиянием эргодических слоев, движение солитона НУШ носит броуновский характер – происходит диффузия в пространстве скоростей. Используя уже обсуждавшуюся аналогию с движением частицы в поле пакета, можно записать следующую оценку для коэффициента диффузии

$$D = 8\varepsilon^2\eta^4 C^2(k_1/2\eta).$$

Этот результат может быть проверен, например, в экспериментах по воздействию лазерного импульса на солитоны в молекулярных кристаллах. Число гармоник в импульсе должно быть не меньше, чем число гармоник, с которыми солитон находится одновременно в резонансе.

Поступила в редакцию
20 апреля 1982 г.
После переработки
13 октября 1982 г.

Литература

1. M. Büttiker, Phys. Lett., 81A, 391 (1981).
2. Ф. Х. Абдуллаев, ФТТ, 23, 3418 (1981).
3. Y. Wada, J. R. Schriffer, Phys. Rev., B18, 3897 (1978).
4. F. Kh. Abdullaev, Phys. St. Sol. (b), 112, N 2, k 5 (1982).

5. V. I. Karpman, V. V. Solov'ev, Phys. Lett., 82 A, 205(1981).
6. Д. В. Маклафлин, Э. С. Скотт, В кн. "Солитоны в действии", " Мир", 1981 г., с. 210.
7. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных динамических системах, "Наука", М., 1970 г.
8. D. J. Kaup, A. S. Newell, Proc. Roy. Soc., A 361, 413(1978).