4. Ф. А. Николаев, В. В. Сорокин, О. М. Стуков, Препринт ФИАН № I57, М., I980 г.
5. Н. А. Власов, Нейтроны, "Наука", М., I97I г.

Краткие сообщения по физике № 3 1983

К ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

В. Ю. Быченков, В. П. Силин, С. А. Урюпин

УДК 533.95I

Развита теория спектра ионно-звуковой турбулентности, одновременно учитывающая индуцированное рассеяние звука на ионах и квазилинейное взаимодействие электронов со звуком. Найдено распределение шумов по волновым числам и углам, обобщающее теорию длинноволновой турбулентности на область коротких длин волн.

Теория ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ), одновременно учитывающая индуцированное рассеяние звука на ионах и квазилинейный процесс релаксации электронов на ионно-звуковых пульсациях, построена в области сравнительно длинных волн $kr_{De} < 1$ (k – волновое число ионного звука, $r_{De(i)}$ – электронный (ионный) дебаевский радиус) /I/. Согласно /I/ распределение ионно-звуковых пульсаций по частоте отвечает спектру Кадомцева – Петвиашвили /2/, а угловое распределение пульсаций в пределе слабой нелинейности, когда величина K_N (явный вид K_N см. ниже), характеризующая турбулентное число Кнудсена, мала по сравнению с единицей ($K_N \ll 1$), оказывается сильно анизотропным и близким к возникающему в квазилинейной теории ИЗТ /3/. В пределе сильной нелинейности ($K_N \gg 1$) распределение длинноволновых ионно-звуковых шумов найдено в /4/. Полученное в /4/ распределение пульсаций, по-прежнему, характеризуется частотным спектром Кадомцева – Петвиашвили, а угловое распределение шумов оказывается более изотропным, чем в случае $K_N \ll 1$.

В настоящем сообщении, базируясь на результатах работ /I,4/, мы нашли спектр ИЗТ в области коротких длин волн $kr_{De} > 1$ в пределе $K_N \gg 1$. Следуя /I/, для определения числа ионно-звуковых волн $N(k, \cos\theta)$, где θ - угол между волновым вектором $\vec{k}$ и вектором $e\vec{E} - n_e^{-1}\nabla n_e \varkappa T_e$ (e, $n_{e(i)}$, $T_{e(i)}$ - заряд, плотность и температура электронов (ионов), $\varkappa$ - постоянная Больцмана, $\vec{E}$ - напряженность электрического поля), воспользуемся уравнением $\Gamma_{NL}(\vec{k}) = 0$, дополненным условием $N(\vec{k}) = 0$ при $\Gamma_{NL}(\vec{k}) < 0$. Нелинейный инкремент $\Gamma_{NL}(\vec{k})$ складывается из электронного инкремента раскачки, декремента затухания ионного звука, обусловленного черенковским эффектом на ионах и ион-ионными столкновениями, и нелинейного декремента, определяемого индуцированным рассеянием волн на ионах. При этом для определения $N(\vec{k})$ имеем:

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}}\,kv_s(1 + k^2r_{De}^2)^{-3/2}\left\{\frac{u(\theta)}{v_s}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2r_{De}^2}}\left[1 + \frac{v_{Te}r_{De}^2}{v_{Ti}r_{Di}^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\,\frac{1}{1 + k^2r_{De}^2}\right)\right] - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\frac{\nu_{ii}}{\omega_{Li}}\,\frac{v_{Te}}{v_{Ti}}\,\frac{r_{Di}^3}{r_{De}^3}\,\frac{(1 + k^2r_{De}^2)^{5/2}}{kr_{De}}\Bigg\} + \tag{I}$$

$$+ \frac{k^2v_{Ti}^2}{4\pi n_e \varkappa T_e}(1 + k^2r_{De}^2)^{3/2}\,\frac{\partial}{\partial k}\left\{k^4(1 + k^2r_{De}^2)^{3/2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\times\right.$$

$$\left.\times\,Q(\cos\theta, \cos\theta')N(k, \cos\theta')\right\} = 0,$$

где $\omega_{Le(i)}$, $v_{Te(i)}$ - ленгмюровская частота, тепловая скорость электронов (ионов), v_s - скорость звука, ν_{ii} - частота ион-ионных столкновений, $Q(x, y)$ - ядро нелинейного взаимодействия /5/

$$Q(x, y) = x^2y^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y^2) - x^4y^4 -$$

$$- \frac{3}{8}(1-x^2)^2(1-y^2)^2 - 3x^2y^2(1-x^2)(1-y^2).$$

В уравнении (I) величина $u(\theta)$ имеет смысл дрейфовой скорости электронов, возникающей под действием эффективной силы $e\vec{E} - n_e^{-1}\nabla n_e \varkappa T_e$ и определяющейся соотношением

$$u(\theta) = \frac{v_s}{\pi}\int\limits_{-\sin\theta}^{\sin\theta}\frac{d(\cos\theta')}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta'}}\,\frac{\nu_0 + \nu_1(\sin\theta')\sin^{-1}\theta'}{\nu_{st} + \nu_2(\sin\theta')}, \qquad (2)$$

где

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{9\pi}{8}}\,\frac{v_{Te}^2}{v_s}\left(\frac{e\vec{E}}{\varkappa T_e} - \nabla \ln n_e T_e\right)_z, \quad \nu_{st} = \frac{2\pi Z e^4 n_e}{m_e^2 v_{Te}^3}\Lambda,$$

$-Ze$ – заряд иона, m_e – масса электрона, Λ – кулоновский логарифм, а турбулентные частоты $\nu_n(t)$ $(n = 1,2)$ равны:

$$\nu_n(t) = v_{Te}\int\limits_{k_{min}}^{k_{max}}\frac{k^3dk}{(2\pi)^2}\int\limits_{-t}^{t}dx\,\frac{\omega_s N(k,x)}{n_e\varkappa T_e}\left(\frac{x}{t}\right)^n\frac{(\omega_s/kv_s)^{2-n}}{\sqrt{t^2-x^2}}, \qquad (3)$$

$\omega_s = kv_s/\sqrt{1+k^2r_{De}^2}$ – частота ионного звука, k_{min} и k_{max} – нижняя и верхняя границы области турбулентности в пространстве волновых чисел.

Рассмотрим уравнение (I) в пределе очень высокого уровня ионно-звуковых пульсаций $K_N = \nu_0\sqrt{8\pi}r_{Di}^2/\omega_{Li}r_{De}^2 \gg 1$, когда в области волновых чисел $k_{min} \ll k \ll k_{max}$ нелинейный декремент превосходит декремент затухания ионного звука на электронах и ионах. При этом величины k_{min} и k_{max} сами определяются уровнем ионно-звуковых шумов $k_{min}r_{De} \approx \left[\nu_{ii}v_{Te}r_{Di}^3/\omega_{Li}v_{Ti}r_{De}^3\sqrt{K_N}\right] \ll 1$, $k_{max}r_{De} \approx (r_{De}/r_{Di}\sqrt{\Lambda_0}) \gg 1$, где $\Lambda_0 = \ln(v_{Te}^2r_{De}^4/v_{Ti}^2r_{Di}^4K_N) - 3$. Тогда в области $k_{min} \ll k \ll k_{max}$ уравнение (I) допускает разделение переменных $N(k,\cos\theta) = N(k)\Phi(\cos\theta)$ и приводит к следующему распределению ИЗТ по волновым числам:

$$N(k) = \frac{4\pi n_e \varkappa T_e}{v_{Ti}^2}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}}\frac{v_s}{k^4}(1 + k^2 r_{De}^2)^{-3/2}\times \tag{4}$$

$$\times\left[\ln\frac{\sqrt{1 + k^2 r_{De}^2}}{k r_{De}} - \frac{1}{2(1 + k^2 r_{De}^2)} - \frac{1}{4(1 + k^2 r_{De}^2)^2}\right].$$

Выражение (4) в области длинных волн $k r_{De} < 1$ приводит к спектру Кадомцева - Петвиашвили /2/ $N(k) \sim k^{-4}\ln(1/k r_{De})$, а в области коротких волн $k r_{De} > 1$ отвечает спектру Галеева и Сагдеева /6/ $N(k) \sim k^{-13}$. В свою очередь, для функции $\Phi(\cos\theta)$ (углового распределения шумов) имеем следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{2}{\pi}\cos\theta\int_0^{\sin\theta}\frac{d(\cos\theta')}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta'}}\frac{K_N + \lambda_1\chi_1(\sin\theta')\sin^{-1}\theta'}{K_N/K_{st} + \lambda_2\chi_2(\sin\theta')} = \tag{5}$$

$$= \int_0^1 d(\cos\theta')Q(\cos\theta, \cos\theta')\Phi(\cos\theta').$$

Здесь $K_{st} = \nu_0/\nu_{st}$, $\chi_n(t) = \int_0^t dx(t^2 - x^2)^{-1/2}(x/t)^n\Phi(x)$,

$$\lambda_n = \int_{u_1}^{u_2} du(1 + u^2)^{n/2-3}\left[\ln\frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} - \frac{1}{2(1 + u^2)} - \frac{1}{4(1 + u^2)^2}\right].$$

Поскольку $u_1 = k_{min} r_{De} \ll 1$, $u_2 = k_{max} r_{De} \gg 1$ для λ_n приближенно имеем: $\lambda_1 = 32/63 \approx 0{,}5$, $\lambda_2 = (\pi/4)(\ln 2 - 1/32) \approx 0{,}7$. Уравнение (5) переходит в исследованное ранее /4/, если принять $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следуя /4/, решение уравнения (5) найдем в условиях $K_{st} \gg \sqrt{K_N/\lambda_2}$, когда конус углов области турбулентности практически полностью раскрыт, так что шум распределен от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$. При этом уравнение (5) упрощается, а его решение отличается от полученного в /4/ лишь заменой K_N на K_N/λ_2:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi x^2}\sqrt{\frac{K_N}{\lambda_2}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^5 dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}\Big[a_1 + a_2 t^2 + a_3 t^4 +$$

$$+ t^2\sqrt{1 - t^2}(a_4 - a_3 t^2)\ln\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}\Big]^{-1}, \qquad (6)$$

где величины a_n найдены численно в /4/ и равны: $a_1 = 0,26$, $a_2 = -0,19$, $a_3 = 0,31$, $a_4 = 0,09$.

Область применимости спектра (4), (6), также как в /4/, ограничена со стороны больших значений K_N требованием малости энергии шумов по сравнению с тепловой энергией плазмы, а также малости величин электронных потоков по сравнению с их значениями в условиях свободномолекулярного переноса (см. неравенства (4.13) и (4.15) в /4/). Однако, как показано в /4/, диапазон применимости нелинейной теории ИЗТ при $K_N \gg 1$ все еще достаточно широк для плазмы с тяжелыми ионами малой кратности ионизации.

Формулы (4), (6) дополняют теорию спектра ИЗТ /1,4/ в области коротких длин волн и открывают возможность исследования закономерностей ускорения ионов, поскольку именно для коротковолновой турбулентности возникает наиболее эффективное черенковское взаимодействие ионного звука с ионами.

Поступила в редакцию
22 октября 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. В. Ю. Быченков, В. П. Силин, ЖЭТФ, 82, 1886 (1982).
2. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы, т. 4, М., Атомиздат, 1964 г., с. 258.
3. Л. И. Рудаков, Л. В. Кораблев, ЖЭТФ, 50, 220 (1966).
4. В. Ю. Быченков, О. М. Градов, В. П. Силин, Препринт ФИАН № 14, М., 1983 г.
5. В. Ю. Быченков, В. П. Силин, ДАН СССР, 260, 1090 (1981).
6. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Нелинейная теория плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы, т. 7, М., Атомиздат, 1973 г., с. 104.