Краткие сообщения по физике № 4 1983

ДИРАКОВСКИЙ МОНОПОЛЬ В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА

М. З. Иофа

УДК 530.145

Показано, что в абелевой модели Хиггса поле дираковского монополя на больших расстояниях от монополя имеет вид вихревой нити, окружающей дираковскую струну.

Монополь, впервые рассмотренный Дираком в электродинамике, представляет собой точечный магнитный заряд с бесконечно тонкой сингулярной нитью (струной), выходящей из монополя. Положение струны в пространстве может быть задано произвольно /1/. В настоящей заметке рассматривается точечный монополь в абелевой модели Хиггса (АМХ). В этой модели также известно точное статическое решение уравнений движения – бесконечно длинная вихревая нить, несущая конечную энергию на единицу длины /2/.

Как и в электродинамике, определим тензор поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + G^*_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где $G_{\mu\nu}$ отлично от нуля только на поверхности, заметаемой струной. Поверхность задается уравнением $y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1)$, а мировая линия монополя – уравнением $y_\mu = y_\mu(\tau_0, 0)$. Уравнения полей имеют вид:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + e^2 f^2 (A_\nu - \partial_\nu \chi) = 0, \qquad (2)$$

$$\partial^2_\mu \Phi - 2ieA_\mu \partial_\mu \Phi - e^2 A^2_\mu \Phi - 2V'(\Phi) = 0, \qquad (3)$$

$$\partial_\mu F^*_{\mu\nu} = g \int d\tau (dy_\nu(\tau)/d\tau) \delta^{(4)}(x - y(\tau)) \equiv k_\nu. \qquad (4)$$

Здесь $\phi = fe^{ie\chi}$, $V(\phi)$ – потенциал самовзаимодействия поля ϕ, k_ν – ток магнитного заряда g, определяемый аналогично току электрического заряда.

Уравнение (4) имеет такой же вид, как в электродинамике, и имеет решение

$$G_{\mu\nu}(x) = g\int d\tau_0 d\tau_1 \delta^{(4)}(x - y(\tau_0,\tau_1))\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial\tau_0}\frac{\partial y_\nu}{\partial\tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial\tau_1}\frac{\partial y_\nu}{\partial\tau_0}\right). \quad (5)$$

В калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ уравнение (2) дает

$$\partial_k^2 A_i - e^2 f^2 (A_i - \partial_i \chi) + \partial_k G^+_{ki} = 0. \quad (6)$$

Для монополя, расположенного в начале координат, сингулярную нить направим вдоль оси $z < 0$.

Потенциал $V(\phi)$ имеет минимум при $\phi = \phi_0$. В результате спонтанного нарушения симметрии появляется размерный параметр – масса $m = e\phi_0$. Поэтому возникает масштаб, позволяющий рассмотреть две физически различные области: область вблизи струны, для точек которой расстояние до струны таково, что $mr < 1$, и область $mr \gg 1$.

Статическое решение уравнений поля (в классе решений с $A_0 = 0$) естественно искать в цилиндрически-симметричной форме.

Рассмотрим сначала область вблизи сингулярной нити. Решение для вещественной части хиггсовского поля f предполагается убывающим при $\rho \to 0$, $z < 0$ (ρ, z, φ – цилиндрические координаты). Уравнение (6) дает:

$$\partial_k^2 A_i + \partial_k G^+_{ki} = 0, \quad G^+_{ki} = g\varepsilon_{ki3}\Theta(-z)\delta^{(2)}(x). \quad (7)$$

Уравнение (7) совпадает с уравнением для точечного монополя в электродинамике (в этом случае оно справедливо во всем пространстве) и имеет (частное) решение

$$A_\varphi = \tilde{g}\rho/[r(r+z)], \quad A_z = A_\rho = 0. \quad (8)$$

При малых ρ и фиксированном $z<0$ (вблизи струны) из (8) следует

$$A_\varphi \approx 2\tilde{g}/\rho. \tag{9}$$

Из (3) получаем уравнение для f:

$$\partial_\mu^2 f - e^2 f(A_\mu - \partial_\mu \chi)^2 - 2V'(f) = 0. \tag{I0}$$

В предположении, что фаза χ не сингулярна вблизи струны, из (I0) с учетом (9) имеем

$$f'' + (1/\rho)f' - 4e^2\tilde{g}^2 f/\rho^2 = 0. \tag{II}$$

Из (II) получаем, что при $\rho \to 0$, $z<0$, $f(\rho,z) \backsim \rho^a$, $a = 2e\tilde{g}$. Можно показать, что при $r \to 0$, $z>0$, $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $f \backsim r^a$.

Расомотрим область больших расстояний до струны. В этой области (с экспоненциальной точностью, см. ниже) можно положить $e^2f^2 = m^2$. Отметим, что уравнение

$$\partial_k^2 B_i - m^2 B_i + \partial_k G_{ki}^+ = 0, \tag{I2}$$

рассматриваемое при всех значениях аргумента, имеет решение

$$B_\varphi(\rho,z) = \tilde{g}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{-z}^{\infty} ds(\rho^2 + s^2)^{-1/2}\exp\left[-m(\rho^2 + s^2)^{1/2}\right],$$
$$B_\rho = B_z = 0. \tag{I3}$$

Из формулы (I3) получаем при $z>0$, $m\sqrt{\rho^2 + z^2} \gg 1$

$$B_\varphi \sim \exp\left[-m\sqrt{\rho^2 + z^2}\right](\rho^2 + z^2)^{-1/2}, \tag{I4}$$

и при $m|z| \gg m\rho \gg 1$, $z<0$

$$B_\varphi(\rho,z) \approx 2\tilde{g}m\sqrt{\pi/2m\rho}\,e^{-m\rho}. \tag{I5}$$

Заметим, что при $\rho \to 0$, $z<0$, $B_\varphi(\rho, z) \simeq 2\tilde{g}/\rho$, как и в чистой электродинамике.

Рассмотрим вопрос о виде хиггсовского поля на больших расстояниях от струны. Из (3) следует уравнение для фазы хиггсовского поля

$$\partial_\mu^2 \chi - 2\,\frac{\partial_\mu f}{f}\,(A_\mu - \partial_\mu \chi) = 0. \qquad (16)$$

Очевидно, что уравнения (6), (10), (16) могут удовлетворяться полями вида $A = (A_\varphi(\rho, z), 0, 0)$, $f = f(\rho, z)$, $\partial_\mu^2 \chi = 0$, в частности, $\chi = 0$. Для таких полей система уравнений сводится к следующим:

$$\partial_\mu^2 B_\nu + e^2 f^2 B_\nu + \partial_\mu G^+_{\mu\nu} = 0, \quad B_\nu = A_\nu - \partial_\nu \chi,$$

$$\partial_\mu^2 f - e^2 f B_\nu^2 - 2V'(f) = 0.$$

В области больших расстояний от струны решение для f ищется в виде $f = \Phi_0 + f_1$. Для B_ν с экспоненциальной точностью (см. ниже) справедливо решение (13). Для f_1 получаем

$$\partial_k^2 f_1 - e^2 \Phi_0 B_k^2 + 2V''(\Phi_0) f_1 = 0, \qquad (17)$$

откуда следует, что на больших расстояниях от струны f_1 экспоненциально убывает.

Уравнения (6), (10), (16) могут удовлетворяться полями более общего вида. Если на больших расстояниях от струны $A_\nu \gg \partial_\nu \chi$, то для таких полей в уравнениях (6), (10), (16) можно пренебречь $\partial_\nu \chi$ по сравнению с A_ν. Подстановка в уравнение (16) решения (13) и $f = f_0 + f_1$ дает (с учетом экспоненциального убывания f_1) экспоненциальную малость χ и $\partial_\mu \chi$ по сравнению с A_μ.

В АМХ, как и в электродинамике, магнитное поле определим как ротор векторного потенциала. Поскольку на малых расстояниях от монополя $mr \ll 1$ решение для векторного потенциала в АМХ совпадает с решением в электродинамике, то поток магнитного поля в АМХ равен $4\pi g$. На больших расстояниях от струны и монополя потенциал и магнитное поле в АМХ убывают экспоненциально. Поскольку поток поля через замкнутую поверхность сохраняется (нет источников поля), то магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность, окружающую монополь, равен $4\pi g$, причем на больших расстояниях от монополя поле сконцентрировано в области $m\rho \ll 1$ (при $z < 0$). Отметим, что асимптотика потенциала (I5) совпадает с асимптотикой убывающей части потенциала для вихревого решения в АМХ.

Таким образом, качественно, поле магнитного монополя в АМХ на малых расстояниях от монополя $mr \ll 1$ мало отличается от кулоновского поля, а на больших расстояниях от монополя сжимается в трубку и имеет характер вихря.

В отличие от точного решения в АМХ - бесконечно длинного вихря, имеющего топологическую характеристику - квантованный в целых единицах интеграл от фазы хиггсовского поля вдоль замкнутого контура, охватывающего вихрь, отражающую квантование магнитного потока вихря в единицах I/e /2/, в случае монополя в АМХ интеграл от фазы хиггсовского поля вдоль любого контура равен нулю (замкнутый контур стягивается в точку). Однако можно показать, что из условия независимости петли Вильсона

$$\exp\left(ie \oint_C A_i dx_i\right) = \exp\left(ie \int_{S(C)} (\mathrm{rot}\ A)_i dS_i\right)$$

от поверхности S(C), натянутой на произвольный контур C, следует условие квантования Дирака $eg = 2\pi n$ /1/.

В заключение благодарю М. А. Соловьева и В. Я. Файнберга за полезные замечания.

Поступила в редакцию
I5 ноября 1982 г.

Литература

1. P. A. M. Dirac, Phys. Rev., 74, 817 (1948).
2. H. B. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys., B61, 45 (1973).