УДК 530.1

УГЛОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГРУППА SU(2) В КВАНТОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

В. А. Борохов

В рамках формализма P-квазиспина рассматриваются угловые операторы на неприводимых представлениях поляризационной группы SU(2). Найдена связь угловых операторов с операторами P-квазиспина. Приводятся средние значения тригонометрических функций угловых операторов в ряде состояний квантового светового пучка. Обсуждаются связь угловых операторов с соответствующими классическими величинами и альтернативные методы их введения.

Поляризационные характеристики света в классической оптике задаются параметрами Стокса [1 – 3]. В квантовом случае используются операторы P_α, $\alpha = (0, +, -)$, которые являются генераторами поляризационной группы SU(2) и определяют поляризационный P-квазиспин [4, 5]:

$$P_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(N_+(j) - N_-(j)),\ P_\pm = \sum_{j=1}^{m} a_\pm^+(j)a_\mp(j),$$

где $N_\pm(j)$ – операторы числа физических фотонов с соответствующей спиральностью в j-ой пространственно-временной моде, $a_\pm^+(j)$ и $a_\pm(j)$ – соответственно операторы рождения и уничтожения физических фотонов в фоковском пространстве L_F.

Операторы P_α описывают трансформационные свойства света относительно вращений в поляризационном спинорном пространстве и, в случае одной пространственно-временной моды, совпадают (с точностью до 1/2) с операторами Стокса [6].

Коммутационные соотношения для генераторов группы SU(2) имеют вид:

$$[P_0, P_\pm] = \pm P_\pm,\ [P_+, P_-] = 2P_0.$$

Оператором Казимира является

$$P^2 = \frac{1}{2}(P_+P_- + P_-P_+) + P_0^2, \ [P^2, P_\alpha] = 0. \quad (1)$$

Операторы $\hbar P_\alpha$ аналогичны операторам момента импульса J_α в квантовой механике. Собственные значения оператора P^2 есть $p(p+1)$, где $p = 0, 1/2, 1, ...$ Таким образом, пространство L_F является прямой суммой пространств с фиксированными значениями p:

$$L_F = \sum_p L(p), \quad (2)$$

где $L(p) = \{|p, \pi, \lambda>, \ \pi = -p, .., p\}$, $P^2|p, \pi, \lambda >= p(p+1)|p, \pi, \lambda>$, $P_0|p, \pi, \lambda >= \pi|p, \pi, \lambda>$, а λ – некоторые дополнительные параметры [5], включающие, например, полное число фотонов. Отметим, что $dimL(p) = \infty$, однако действие операторов P_α не изменяет значений дополнительных параметров и поэтому мы будем рассматривать $L(p)$ как пространство конечной размерности $2p+1$, а величины λ в состояниях $|p, \pi, \lambda>$ ниже явно указывать не будем.

Средние значения операторов P_α определяют степень поляризации $\mathcal{P}$ квантового светового пучка при помощи соотношения [5]:

$$\mathcal{P} = 2(< P_1 >^2 + < P_2 >^2 + < P_0 >^2)^{1/2} / < N >,$$

где $N = \sum_{j=1}^{m}(N_+(j) + N_-(j))$, $P_1 = (P_+ + P_-)/2$, $P_2 = (P_+ - P_-)/2i$.

В каждом пространстве $L(p)$ оператор P^2 есть C-число, и в квазиклассическом пределе ($p >> 1$) операторам P_i, где $i = (0, 1, 2)$, соответствуют декартовы координаты точки на сфере в R^3 с радиусом P (сфере Пуанкаре) [7], являющейся фазовым пространством поляризации света. Однако величины P_i являются зависимыми вследствие (1). Естественно рассмотреть возможность введения операторов, действующих в пространствах $L(p)$, соответствующих координатам непосредственно на сфере S^2.

В [8] были введены операторы

$$P_r = (P_+P_-)^{1/2}, \ E = \sum_{\pi=-p}^{p} |p, \pi + 1 >< p, \pi|, \quad (3)$$

где $|p, \pi >\equiv |p, \pi \mathrm{mod}(2p+1)>$. Для операторов P_+ и P_- имеем:

$$P_+ = P_r E, \ P_- = E^+ P_r. \quad (4)$$

Кроме того,

$$P_r = P^2 - P_0^2 + P_0)^{1/2}, \ [P_r, P_0] = 0. \quad (5)$$

Согласно (3), E является "повышающим оператором" с условием цикличности

$$E|p,p>=|p,-p>, \tag{6}$$

и, так как оператор E унитарен, $E^+E = EE^+ = 1$, существует эрмитов оператор φ такой, что $E = \exp i\varphi$.

В квазиклассическом пределе операторам P_0, P_τ и φ соответствуют цилиндрические координаты в R^3.

В этой работе рассматриваются операторы, которым в классическом и квазиклассическом пределах соответствуют полярный и азимутальный углы (φ, θ) сферической системы координат в R^3, являющиеся координатами на сфере Пуанкаре[1].

Преобразуем (4) к следующему виду:

$$P_+ = \sqrt{p+P_0}\exp i\varphi\sqrt{p-P_0},$$

$$P_- = \sqrt{p-P_0}\exp(-i\varphi)\sqrt{p+P_0},$$

откуда

$$\begin{gathered} P_0 = p\cos\theta, \\ P_+ = 2p\cos\frac{\theta}{2}\exp i\varphi\sin\frac{\theta}{2}, \\ P_- = 2p\sin\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi)\cos\frac{\theta}{2}, \end{gathered} \tag{7}$$

где введен "азимутальный" оператор θ. Равенства (4) и (7) не фиксируют действия оператора $\exp i\varphi(\exp(-i\varphi))$ на вектор $|p,p>$ $(|p,-p>)$. Это соответствует тому, что полярный угол в сферической системе координат в R^3 не определен при $\theta = 0, \pi$, а дополнительное условие (6) обеспечивает унитарность оператора $\exp i\varphi$ и приводит к тому, что спектр собственных значений оператора φ является дискретным.

Обратное к (7) преобразование есть

$$\cos\theta = \frac{P_0}{p},$$

$$\exp i\varphi = \frac{1}{\sqrt{(p+P_0)(p-P_0+1)}}P_+ + \frac{P_-^{2p}}{(2p)!}, \tag{8}$$

[1]Постановка этой задачи была предложена В. П. Карасевым.

где для определенности будем считать $\cos\theta = 1$ при $p = 0$.

Слагаемое $P_-^{2p}/(2p)!$ в (8) может рассматриваться как доопределение оператора P_+ при действии на "максимальный" вектор $|p, p>$.

Поскольку набор операторов $\{\exp i n\varphi,\ n = 0...2p\}$ образует абелеву циклическую группу, ее неприводимые представления одномерны и реализованы на собственных векторах оператора $\exp i\varphi$ ($\Delta\varphi \equiv \frac{2\pi}{2p+1}$, $n = -p,..p$) [8]:

$$|p, \varphi_n >= (2p+1)^{-1/2} \sum_{m=-p}^{p} \exp(-i\varphi_n m)|p, m>,\ p - \text{целое}, \tag{9}$$

$$|p, \varphi_n >= (2p+1)^{-1/2} \sum_{m=-p}^{p} \exp(-i\varphi_n (m+1/2))|p, m>,\ p - \text{полуцелое},$$

где $\varphi_n = \Delta\varphi n$, если p – целое, и $\varphi_n = \Delta\varphi(n + \frac{1}{2})$, если p – полуцелое.

Состояния (9) являются также собственными векторами оператора φ: $\varphi = \sum_{n=-p}^{p} \varphi_n |p, \varphi_n >< p, \varphi_n|$ и образуют базис в $L(p)$.

В [8] отмечено, что операторы P_0 и φ не являются канонически сопряженными операторами, что согласуется с тем, что алгебра Гейзенберга – Вейля не имеет унитарных конечномерных представлений. Однако справедливы следующие соотношения:

$$[P_0, \exp i\varphi] = \exp i\varphi(1 - (2p+1)|p, p >< p, p|), \tag{10}$$

и, если p – целое,

$$\exp(i\Delta\varphi P_0)\varphi\exp(-i\Delta\varphi P_0) = \varphi + \Delta\varphi - 2\pi|p, \varphi_{max} >< p, \varphi_{max}|,$$

$$\exp(-i\Delta\varphi P_0)|p, \varphi_n >= |p, \varphi_{(n+1)mod(2p+1)}>,$$

если p – полуцелое,

$$\exp(i\Delta\varphi P_0)\varphi\exp(-i\Delta\varphi P_0) = \varphi + \Delta\varphi - (2\pi + \Delta\varphi)|p, \varphi_{max} >< p, \varphi_{max}|,$$

$$\exp(-i\Delta\varphi(P_0 + \frac{1}{2}))|p, \varphi_n >= |p, \varphi_{(n+1)mod(2p+1)}> .$$

Далее рассмотрим средние значения тригонометрических функций угловых операторов φ и θ в некоторых стандартных состояниях.

В собственных состояниях операторов P^2 и P_0 ($|p, \pi>$)

$$< \cos\theta >= \frac{\pi}{p},\ < (\Delta\cos\theta)^2 >= 0,$$

$$< \cos\varphi >= \begin{cases} 1, & p=0, \\ 0, & p>0, \end{cases} \quad < (\Delta\cos\varphi)^2 >= \begin{cases} 0, & p=0, \\ 1, & p=1/2, \\ 1/2, & p>1/2. \end{cases}$$

В случае собственных состояний операторов P^2 и φ ($|p, \varphi_n >$)

$$< \cos\theta >= 0, \ < (\Delta\cos\theta)^2 >= (p+1)/3p,$$

$$< \cos\varphi >= \cos\varphi_n, \ < (\Delta\cos\varphi)^2 >= 0.$$

Укажем, что

$$< P_1 >= \frac{\cos\varphi_n}{2p+1}\sum_{m=-p}^{p}[p(p+1)-m(m-1)]^{1/2},$$

$$< P_2 >= \frac{\sin\varphi_n}{2p+1}\sum_{m=-p}^{p}[p(p+1)-m(m-1)]^{1/2}.$$

Для нахождения квазиклассического предела $p >> 1$ (в случае квантовомеханического момента импульса это соответствует тому, что $\hbar \to 0$ при фиксированном J) рассмотрим средние значения операторов в обобщенных когерентных состояниях SU(2)

$$|\xi, p >= \exp(\xi P_+ - \xi^* P_-)|p, p >, \ \xi = -\frac{\alpha}{2}\exp(-i\beta),$$

где для удобства примем $-\pi \le \beta \le \pi$. Тогда

$$< \cos\theta >= \cos\alpha, \ < (\Delta\cos\theta)^2 >= \frac{1}{2p}\sin^2\alpha,$$

$$< \cos\varphi >= \cos^{4p}(\alpha/2)(\cos\beta\sum_{m=1}^{2p}\tan^{2m-1}(\alpha/2)\sqrt{C_{2p}^{m-1}C_{2p}^{m}}+$$

$$\tan^{2p}(\alpha/2)\cos(2p\beta)),$$

$$< \sin\varphi >= \cos^{4p}(\alpha/2)(\sin\beta\sum_{m=1}^{2p}\tan^{2m-1}(\alpha/2)\sqrt{C_{2p}^{m-1}C_{2p}^{m}}+$$

$$\tan^{2p}(\alpha/2)\sin(2p\beta)),$$

$$< \cos^2\varphi >= \frac{1}{2}(1+\cos^{4p}(\alpha/2)(\cos 2\beta\sum_{m=1}^{2p-1}\tan^{2m}(\alpha/2)\sqrt{C_{2p}^{m-1}C_{2p}^{m+1}}+$$

$$\sqrt{2p}\frac{\tan^{2p-1}(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}\cos(2p-1)\beta)).$$

В пределе $p \to \infty$, при $\alpha \neq 0, \pi$, находим

$$< \cos\theta >= \cos\alpha,\ < \cos^2\theta >= \cos^2\alpha,\ < \cos\varphi >= \cos\beta,$$

$$< \sin\varphi >= \sin\beta,\ < \cos^2\varphi >= \cos^2\beta,\ < \sin^2\varphi >= \sin^2\beta.$$

Таким образом, $\theta_{qclas} = \alpha$, $\varphi_{qclas} = \beta$. При этом

$$< P_0 >= p\cos\theta_{qclas},$$

$$< P_1 >= p\sin\theta_{qclas}\cos\varphi_{qclas},$$

$$< P_2 >= p\sin\theta_{qclas}\sin\varphi_{qclas}.$$

Примечательно, что слагаемое $P_-^{2p}/(2p)!$ в (8) необходимо для того, чтобы оператор $\exp i\varphi$ являлся унитарным, однако в квазиклассическом пределе оно исчезает:

$$\lim_{p\to\infty} < \xi, p|P_-^{2p}/(2p)!|\xi, p >= 0.$$

В дополнение укажем, что в квазиклассическом пределе равенство (10) в случае квантовомеханического момента импульса имеет вид: $\{J_0, \exp i\varphi\} = -i\exp i\varphi$, где $\{..,..\}$ сть классическая скобка Пуассона.

Рассмотрим классический предел ($< N >>> 1$) угловых операторов (ограничимся случаем одной моды). В глауберовских когерентных состояниях

$$|\alpha_+, \alpha_- >= \exp(\alpha_+ a_+^+ + \alpha_- a_-^+ - h.c.)|vac>,$$

находим

$$< \cos\theta >= \frac{|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2}{|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2} = 2\frac{< P_0 >}{< N >},\ < N >= 2 < P >= |\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2,$$

$$< \cos\varphi >= [\cos(arg(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}))\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{|\alpha_+|^{2m+1}|\alpha_-|^{2n+1}}{m!(n+1)!}\sqrt{\frac{n+1}{m+1}} +$$

$$Re(\exp\alpha_+\alpha_-^*)]\exp\{-(|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2)\},$$

$$< \sin\varphi >= [\sin(arg(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}))\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{|\alpha_+|^{2m+1}|\alpha_-|^{2n+1}}{m!(n+1)!}\sqrt{\frac{n+1}{m+1}} +$$

$$Im(\exp\alpha_+\alpha_-^*)]\exp\{-(|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2)\},$$

$$< \cos^2\varphi >= \frac{1}{2}(1 + \exp\{-(|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2)\}\cos(2arg(\frac{\alpha_-}{\alpha_+}))$$

$$\sum_{m=0,n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_+|^{2(m+1)}|\alpha_-|^{2(n+1)}}{\sqrt{m!(m+2)!n!(n+2)!}} + ...),$$

где многоточие означает слагаемые, исчезающие в классическом пределе $< N >>> 1$. При больших $< N_+ >$ и $< N_- >$ получаем:

$$< \cos\theta >=< P_0 > / < P >,$$

$$< \cos\varphi >= \cos(arg(\alpha_-/\alpha_+)), \ < \sin\varphi >= \sin(arg(\alpha_-/\alpha_+)),$$

$$< \cos^2\varphi >= \cos^2(arg(\alpha_-/\alpha_+)), \ < \sin^2\varphi >= \sin^2(arg(\alpha_-/\alpha_+)).$$

Значит $\theta_{clas} = \arccos(< P_0 > / < P >)$, $\varphi_{clas} = \arg(\alpha_-/\alpha_+)$, где функция arg принимает значения от $-\pi$ до π. Кроме того, справедливы соотношения

$$< P_0 >=< P > \cos\theta_{clas},$$

$$< P_1 >=< P > \sin\theta_{clas}\cos\varphi_{clas},$$

$$< P_2 >=< P > \sin\theta_{clas}\sin\varphi_{clas}.$$

Таким образом, в классическом и квазиклассическом пределах угловым операторам φ и θ соответствуют полярный и аксиальный углы сферической системы координат, которые параметризуют сферу Пуанкаре.

Рассмотренные угловые операторы заданы на пространствах $L(p)$ и, вследствие разложения (2), определены во всем фоковском пространстве. Тому факту, что $[P_0, \varphi] \neq -i$, может быть дано следующее объяснение. В классическом случае физическая величина f удовлетворяет свойству:

$$f|_{\varphi=-\pi} = f|_{\varphi=\pi}. \tag{11}$$

Очевидно, что полярный угол φ не удовлетворяет (11), и поэтому при построении эрмитового оператора φ возникают определенные трудности. Функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, напротив, удовлетворяют (11), и оказывается возможной реализация этих величин в качестве эрмитовых операторов. Однако эрмитовый оператор φ, построенный на собственных векторах унитарного оператора $\exp i\varphi$, не является канонически сопряженным оператору P_0.

Разложения (7) позволяют ввести угловые операторы не только для полного P-квазиспина квантового светового пучка, состоящего из m мод, но и для P-квазиспина каждой отдельной моды.

Укажем, что (7) не является единственным способом введения угловых операторов: альтернативными возможностями являются, например,

$$P_0 = (p + \frac{1}{2})\cos\theta - \frac{1}{2},\ P_0 = (p + \frac{1}{2})\cos\theta + \frac{1}{2},$$

$$P_+ = (p + \frac{1}{2})\exp i\varphi \sin\theta,\ P_+ = (p + \frac{1}{2})\sin\theta \exp i\varphi,$$

$$P_- = (p + \frac{1}{2})\sin\theta \exp(-i\varphi),\ P_- = (p + \frac{1}{2})\exp(-i\varphi)\sin\theta.$$

В заключение отметим, что интересным вопросом является введение угловых операторов, аналогичных операторам θ и φ, при рассмотрении групп SU(1,1) и SU(N).

Предварительные результаты этой работы были представлены на XXXIX Юбилейной Научной Конференции МФТИ (Долгопрудный, 29-30 ноября 1996).

Автор благодарит В. П. Карасева и И. В. Тютина за обсуждения и выражает признательность В. А. Авакьянцу за предоставленные технические возможности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Perina J. Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena. Dordrecht: D. Reidel, Pub. Co., 1984.

[2] Gerrard A., Burch J. M. Introduction to Matrix Methods in Optics, London, J. Wiley and Sons, Inc., 1975.

[3] Roman P. Nuovo Cimento, **13**, 974 (1959). Barakat R. J. Opt. Soc. Am., **53**, 317 (1963).

[4] Karassiov V. P. J. Sov. Laser Res., **12**, 147, 431 (1991); Краткие сообщения по физике ФИАН, N 6, 12 (1991).

[5] Карасев В. П. Препринт ФИАН, N 63, Москва, 1992; J. Phys., **A26**, 4345 (1993).

[6] Jauch J. M., Rohrlich F. The Theory of Photons and Electrons. Cambridge, Mass., Addison-Wesley, 1955.

[7] Perina J. Coherence of Light, Van Nostrand, Princeton, 1972.

[8] Vourdas A. Phys. Rev., **A41**, 1653 (1990).

Поступила в редакцию 22 мая 1998 г.