УДК 530.12:531.51

УСТОЙЧИВЫЕ СВОЙСТВА СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ МАССЫ

А. Ю. Андреев

В предположении о существовании в космологическом вакууме частиц с отрицательной массой исследованы устойчивые свойства столкновений этих частиц. Показано, что вопреки ожиданиям, при взаимодействиях частиц разных знаков массы не может произойти бесконечная большая передача энергии и структурная неустойчивось вакуума не возникает. Это подтверждает непротиворечивость использования частиц с отрицательной массой в механизме обращения в ноль космологической постоянной.

Представление о существовании частиц с отрицательной массой, впервые рассмотренное П. Дираком [1], вытекает из двузначности релятивистской зависимости энергии от импульса ($\epsilon^2 = (\vec{p})^2 + m^2, m > 0$), которая предполагает существование решений как с положительным, так и с отрицательным знаком энергии. В первом случае при малых скоростях она переходит в приближенную зависимость $\epsilon = mc^2 + mv^2/2$, тогда как во втором случае $\epsilon = -mc^2 - mv^2/2$, т.е. решения второго типа ведут себя так, как если бы они соответствовали частицам с отрицательным значением массы $(-m)$.

Аналогичное рассуждение можно применить и к лагранжеву формализму. Линейный характер уравнений Лагранжа говорит о независимости решений относительно замены $L \to (-L)$ с той только разницей, что принцип наименьшего действия превращается в принцип наибольшего действия (однако для вывода уравнений необходимо знать только условие экстремальности функционала действия, а не конкретный вид экстремума). Таким образом, после этой замены лагранжиан, например, свободной частицы в классическом случае может выглядеть как $L = -mv^2/2$, т.е. отвечать отрицательному знаку массы частицы.

Лагранжиан, содержащий частицы с массами обоих знаков, был использован А. Д. Линде [2, 3] для объяснения одной из важнейших проблем современной космологии – обращения в нуль космологической постоянной (современное значение Λ по крайней мере на 120 порядков меньше чем его теоретическая оценка на планковских параметрах [4]). Предложенный Линде полный лагранжиан общей теории относительности (ОТО) содержит два одинаковых по форме и противоположных по знаку лагранжиана, отвечающих набору всех физических полей φ и их "двойников" $\tilde{\varphi}$ с отрицательными знаками массы, а также включает геометрический вклад в действие, пропорциональный кривизне пространства–времени:

$$\mathcal{L} = L(\varphi) - L(\tilde{\varphi}) - R/16\pi G. \tag{1}$$

При каждом спонтанном нарушении симметрии появляющиеся на соответствующих масштабах энергии большие постоянные слагаемые (плотность энергии вакуума для каждого из полей) в $L(\varphi)$ и $L(\tilde{\varphi})$ взаимно уничтожаются, гарантируя нулевое значение космологической постоянной.

В классическом приближении для ньютоновского поля тяготения лагранжиан (1) приводит к действию

$$S = \iint \left(\frac{\rho v^2}{2} - \frac{\tilde{\rho}\tilde{v}^2}{2} - (\rho - \tilde{\rho})\Phi - \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi G}\right) dV\, dt.$$

Рассматривая две частицы с массами разных знаков m_1 и $-m_2$ после варьирования по ньютоновскому потенциалу Φ и интегрирования по объему, получим:

$$S = \int L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) dt, \text{ где } L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} - \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{2}$$

При этом полная энергия системы двух таких частиц равна

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{3}$$

Очевидно отличие этой двухчастичной задачи от задачи двух тел с положительными массами – здесь кинетические энергии частиц входят в полную энергию с разными знаками. Следовательно, хотя их сумма ограничена (сверху) в силу закона сохранения энергии, значение кинетической энергии каждой частицы **в отдельности** неограничено и скорости частиц могут бесконечно возрастать.

В частности, легко показать (см. ниже), что первоначально покоившиеся частицы двух одинаковых по модулю, но разных по знаку масс за счет гравитационных сил начнут синхронно двигаться в одну и ту же сторону, бесконечно ускоряясь. Возможность такого неограниченного рождения энергии для нормальных (с положительной массой) и "антиподных" (с отрицательной массой) частиц, казалось бы, свидетельствует о неустойчивых свойствах систем, содержащих частицы обоих типов. Этот пример заставил в свое время П. Дирака отказаться от придания физического смысла решениям с $\epsilon < 0$, рассматривая вместо этого вакуум фермионов с заполненными состояниями отрицательной энергии и движение "дырки" – незаполненного состояния как античастицы с положительной массой. Интересно, однако, что "обоюдное ускорение" пары макроскопических тел с противоположными знаками массы подробно рассматривалось в ОТО, причем была найдена форма решения, не содержащая особенностей, что говорило в пользу возможности физической реализации такой системы [5].

Наша постановка задачи отличается от дираковской тем, что мы рассматриваем не состояния одной и той же частицы с разными знаками энергии, а два различных типа частиц (полей), отличающихся противоположными знаками лагранжиана. Заметим, что речь не идет о состоящих из "антиподной" материи макроскопических телах (теория инфляции позволяет показать, каким образом в наблюдаемой части Вселенной может реализовываться лишь один тип материи [2]). В качестве объекта данной работы мы подразумеваем вакуум, состоящий из полей обоих сортов и способный рождать оба типа частиц. Оказывается, что столкновения этих частиц друг с другом обладают устойчивыми свойствами. Это позволяет сделать важный вывод об устойчивости содержащего их вакуума, подтверждая, таким образом, возможность существования указанного выше физического механизма, приводящего к обращению в нуль космологической постоянной.

В модели вакуума с гипотетическими "антиподными" частицами, согласно лагранжиану (1), гравитация является выделенным взаимодействием. Она связана с геометрией единого пространства–времени, в котором существуют *оба* типа частиц, тогда как все остальные взаимодействия и связанные с ними поля *по отдельности* входят в каждый лагранжиан $L(\varphi)$ и $L(\tilde{\varphi})$, и не имея перекрестных членов, не оказывают влияния друг на друга. Таким образом, "нормальная" и "антиподная" частицы могут взаимодействовать только с помощью гравитационных сил. В ньютоновском приближении это описывает действие (2). В дальнейшем мы ограничимся этим приближением и для исследования столкновений частиц решим определяемую из (2) задачу двух тел, рассматривая ее устойчивые свойства.

Варьируя (2) (т.е. применяя для переменной $\vec{r}_1$ принцип наименьшего действия, а для переменной $\vec{r}_2$ – наибольшего действия), мы получим уравнения:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \tag{4}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Рис. 1. *Гравитационное взаимодействие частиц с разными знаками массы.*

Как видно из (4), отличие взаимодействия нормальной и "антиподной" частицы от обычного тяготения заключается в том, что приобретаемые частицами ускорения направлены в одну и ту же сторону. (Заметим, что это не означает нарушения третьего закона Ньютона, потому что силы взаимодействия частиц, как и требуется, противонаправлены (см. рис.1), но для второй частицы из-за отрицательного знака ее массы направление ускорения противоположно направлению действующей силы.)

При решении системы (4) существуют две возможности.

а) $m_1 \neq m_2$. В этом случае решение (4) ничем не отличается от соответствующей задачи двух тел в нормальном поле тяготения. Введем радиус–вектор центра масс по обычному правилу (но с учетом знака масс частиц!)

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 - m_2} \tag{5}$$

и вектор расстояния между частицами $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Тогда уравнения (4) можно преобразовать к виду

$$\ddot{\vec{R}} = 0; \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 - m_2)}{r^3}\vec{r}. \tag{6}$$

Из первого уравнения (6) следует, что центр масс (5) системы двух частиц движется равномерно и прямолинейно. Переходя в систему, связанную с центром масс (т.е. преполагая в данной системе $\vec{R}(t) \equiv 0$), можно выразить $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через $\vec{r}$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2\vec{r}}{m_2 - m_1}; \; \vec{r}_2 = \frac{m_1\vec{r}}{m_2 - m_1}. \tag{7}$$

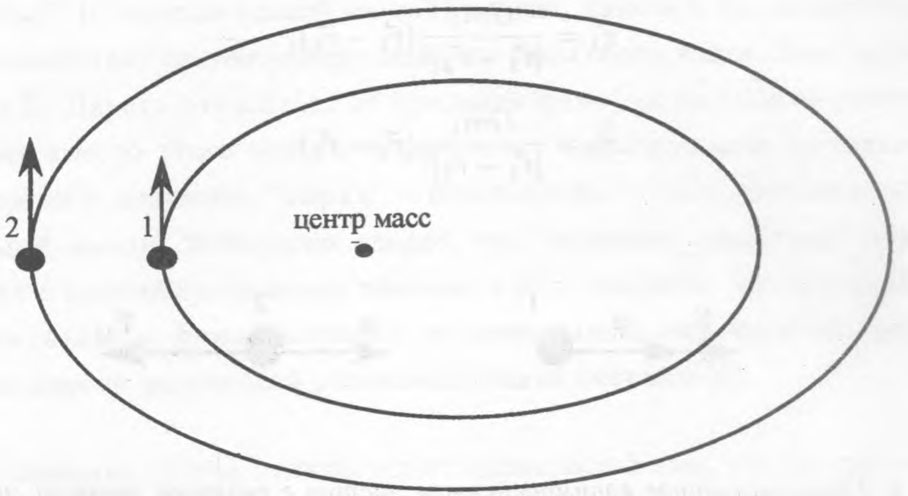

Рис. 2. *Замкнутые орбиты частиц с разными знаками массы при* $m_1 > m_2$.

Отсюда видно, что как и в обычном случае, центр масс системы, состоящей из нормальной и "антиподной" частиц, лежит на прямой, соединяющей частицы, но только не между ними, а снаружи, ближе к той из частиц, которая обладает большим абсолютным значением массы (см. рис. 2).

Зависимость от времени $\vec{r}(t)$ определяется из второго уравнения (6), представляющего собой уравнение движения частицы в центральном поле (см., напр., [6]). При $m_1 > m_2$ это центральное поле является полем притяжения, а при $m_1 < m_2$ – полем отталкивания. В первом из этих случаев решение соответствующей кеплеровской задачи в зависимости от начальных условий допускает появление или замкнутых эллиптических орбит частиц (см. рис. 2), которые будут вращаться вокруг центра масс, или незамкнутых орбит – гипербол. Решение кеплеровской задачи с отталкиванием приводит только к гиперболическим орбитам частиц.

Важно подчеркнуть, что во всех этих случаях, как и в кеплеровской задаче нормального тяготения, величина $(\dot{\vec{r}})^2$ является ограниченной сверху в силу закона сохранения энергии. Это значит, что и скорости каждой из частиц будут ограничены, т.е. бесконечного увеличения кинетической энергии нормальной частицы за счет соответствующего уменьшения кинетической энергии "антиподной" частицы не происходит. После столкновения, которое не привело к возникновению замкнутых орбит, частицы разлетаются, имея некоторые новые, но конечные значения скоростей. Все это свидетельствует об устойчивости системы.

б) $m_1 = m_2 \equiv m$. Этот случай выделен тем, что радиус-вектор центра масс системы из нормальной и "антиподной" частицы с одинаковыми по модулю массами определить невозможно. Действительно, при этом знаменатель в (5) обращается в ноль, что соответствует бесконечно большой величине $|\vec{R}|$, т.е. положение центра масс лежит в бесконечно удаленной точке. Интегрирование уравнений (4) методом обычной задачи двух тел невозможно, тем не менее задача допускает точное решение. Обратим внимание, что в случае равенства m_1 и m_2 правые части обоих уравнений в (4) совпадают, т.е. приобретаемые частицами ускорения равны между собой ($\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2$), а относительная скорость частиц постоянна

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \equiv \vec{v} = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Интегрируя (8), получим

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{v}t + \vec{l}, \tag{9}$$

где $\vec{l}$ – вектор расстояния между частицами в момент времени $t = 0$. За начало отсчета времени естественно выбрать момент наибольшего сближения частиц, соответствующий минимуму $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Из (9) следует, что при таком выборе векторы $\vec{v}$ и $\vec{l}$ перпендикулярны (мы не рассматриваем пока случай движения обеих частиц вдоль одной прямой, о котором будет сказано ниже). Абсолютное значение l по своему смыслу является прицельным расстоянием данного столкновения.

Теперь мы можем подставить выражение (9) в (4) и, производя там интегрирование, в явном виде получить зависимость скоростей частиц от времени

$$\vec{v}_1(t) = Gm\frac{(v^2t\vec{l} - l^2\vec{v})}{v^2l^2(v^2t^2 + l^2)^{1/2}} + \vec{C}; \quad \vec{v}_2(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}. \tag{10}$$

Значение постоянной интегрирования $\vec{C}$ определяется выбором системы отсчета. Поскольку в данной задаче нельзя воспользоваться системой центра масс, в качестве другой "выделенной" системы отсчета можно предложить систему с полной энергией $E = 0$. Согласно (3) и (8), в такой системе частицы перед столкновением, находясь на большом удалении друг от друга, обладают равными по модулю и противоположными по направлению скоростями

$$\vec{v}_1|_{t=-\infty} = \vec{v}/2; \quad \vec{v}_2|_{t=-\infty} = -\vec{v}/2.$$

Тогда из (10) получаем

$$\vec{v}_1(t) = Gm\frac{((v^2t + v\sqrt{v^2t^2 + l^2})\vec{l} - l^2\vec{v})}{v^2l^2\sqrt{v^2t^2 + l^2}} + \frac{\vec{v}}{2},$$

$$\vec{v}_2(t) = Gm\frac{((v^2t + v\sqrt{v^2t^2 + l^2})\vec{l} - l^2\vec{v})}{v^2l^2\sqrt{v^2t^2 + l^2}} - \frac{\vec{v}}{2}.$$

Далее, определяя асимптотическое значение скорости каждой из частиц после столкновения, находим, что при $t \to +\infty$

$$|v_1| = |v_2| = \sqrt{\left(\frac{v^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2Gm}{vl}\right)^2}.$$

Фактически в результате столкновения в данной системе отсчета каждая из скоростей частиц получила одинаковое приращение $\Delta\vec{v} = 2Gm\vec{l}/vl^2$, направленное перпендикулярно направлению первоначального движения. При этом увеличение абсолютного значения кинетической энергии каждой из частиц равно

$$\Delta E = \frac{m}{2}(\Delta v)^2 = \frac{2G^2m^3}{v^2l^2}. \tag{11}$$

Таким образом, рассмотрение и этого случая нецентрального столкновения частиц одинаковой по модулю, но разной по знаку массы, показывает отсутствие неустойчивости, т.к. каждая частица в результате взаимодействия приобретает дополнительно определенную **конечную** кинетическую энергию. (Интересно отметить, что для каждой пары значений v и l существует такая система отсчета, в которой кинетическая энергия частиц до и после соударения вообще не меняется. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить постоянную интегрирования в (10) $\vec{C} = 0$. Относительно рассмотренной системы с $E = 0$ эта система будет двигаться со скоростью $\vec{v'} = Gm\vec{l}/vl^2 - \vec{v}/2$.)

Для приложения нашей модели к проблеме устойчивости космологического вакуума (связанная с которым "лабораторная" система отсчета как раз отвечает условию $E = 0$) важно оценить, насколько велико может быть приращение энергии (11), тем более, что в двух случаях, соответствующих обращению в ноль прицельного расстояния l и относительной скорости частиц v, выражение (11) обращается в бесконечность.

Первый случай ($l = 0$) соответствует движению частиц вдоль одной прямой или центральному удару. Как и в задаче с обычным тяготением, решение здесь имеет особенность, но если там частицы за конечное время "слипались" в точке, соответствовавшей положению центра масс, то здесь не только скорости частиц (стремящиеся к бесконечности по закону $Gm/v(r_0 - vt)$, где v – относительная скорость, r_0 – начальное расстояние между телами), но и их радиусы-векторы достигают за время $t_0 = r_0/v$ бесконечных значений. Это означает, что к этому моменту времени частицы "уходят на бесконечность" с бесконечными скоростями. Данная ситуация как раз показывает проявление исследуемой нами неустойчивости.

Необходимо, однако, заметить, что эта неустойчивость возможна лишь без учета волновых свойств частиц. В квантовой механике абсолютно центральный удар невозможен, и необходимо учитывать квантование углового момента движения, что в нашем случае дает условие $mvl \geq \hbar$. Подставляя это значение в (11), получаем оценку для максимальной приобретенной энергии

$$\Delta E_{max} \sim G^2 m^5/\hbar^2 = (m/M_p)^4\, mc^2,$$

где введена M_p – планковская масса. Поскольку M_p представляет собой верхнюю теоретическую границу масс частиц, ясно, что приращение энергии не превышает ее массу покоя, для большинства же частиц (например, на масштабе электрослабого взаимодействия с $m \sim 100$ *ГэВ*) $\Delta E \ll mc^2$ и не приводит к заметной перестройке распределения частиц по энергиям.

Второй случай более важен, поскольку может реализоваться физически. Если в нашей модели возникают две покоящиеся друг относительно друга ($v = 0$) нормальная и "антиподная" частицы равных масс, то они будут ускоряться до бесконечных энергий с постоянным ускорением $a = Gm/r_0^2$, при этом начальное расстояние между частицами r_0 будет оставаться неизменным. Кинетическая энергия каждой из частиц нарастает по закону $E_{кин}(t) = (G^2m^3/2r_0^4)\,t^2$. Она сравнивается с энергией покоя ($E_{кин} \sim mc^2$) за время $\tau \sim r_0^2 c/Gm$. Из-за малости константы гравитационного взаимодействия можно ожидать, что это время будет очень большим. В самом деле, беря для оценки минимального расстояния между частицами комптоновскую длину волны $r_0 \sim \hbar/mc$, получаем

$$\tau_{min} \sim \hbar^2/Gm^3c = \hbar M_p^2/c^2m^3. \qquad (12)$$

На масштабе электрослабых взаимодействий ($m \sim 100$ *ГэВ*) это дает 10^{18} *с*, что сравнимо с возрастом Вселенной.

Таким образом, разгон пар частиц, которые могли бы родиться в состоянии покоя друг относительно друга из космологического вакуума, в действительности осуществляется слишком медленно для того, чтобы привести к изменению его структуры. Это доказывает устойчивость вакуумного состояния, содержащего два типа полей (частиц) с противоположными знаками лагранжианов.

В качестве иного доказательства этого факта приведем следующее рассуждение: при рождении пары частиц в результате вакуумных флуктуаций характерное время их разбегания не должно превышать характерное время самих флуктуаций поля $\tau < \hbar/mc^2$, в противном случае неоднородности поля успеют исчезнуть, и рождение не состоится.

Применяя в нашем случае для τ оценку (12), получаем отсюда нереализуемое условие $m > M_p$, что и говорит об устойчивости вакуума.

Автор выражает благодарность А. Д. Линде за важные замечания и дополнения, высказанные при обсуждении результатов работы. С глубокой признательностью обращается автор к памяти Д. А. Киржница, в тесном сотрудничестве с которым проходила большая часть этого исследования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 96-02-16566).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., London A, **126**, 360 (1930).
[2] Linde A. D. Rep. Progr. Phys., **47**, 979 (1984).
[3] Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., Наука, 1990, с. 252.
[4] Caroll S. M., Press W. H. Ann. Rev. Astron. Astrophys., **30**, 499 (1992).
[5] Bondi H. Rev. Modern Phys., **29**, 423 (1957). (см. перевод в сб.: Новейшие проблемы гравитации (под ред. Д. Иваненко). М., ИЛ, 1961, с. 309.
[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Наука, 1965, с. 43.

Поступила в редакцию 1 июня 1998 г.