Краткие сообщения по физике № 7 1983

ДИОКОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Н. И. Карбушев, С. Ю. Удовиченко, А. А. Рухадзе

УДК 537.5

Теоретически исследована диокотронная неустойчивость трубчатого релятивистского электронного пучка с учетом отличной от нуля продольной составляющей волнового вектора и непотенциальности поля возмущений. Показано, что неустойчивость носит пороговый характер и может развиваться только при достаточно большой длине пучка.

I. Развитая в /I/ теория диокотронной неустойчивости трубчатых электронных пучков основана на потенциальном приближении и применима только для нерелятивистских пучков. В работах /2-4/ она обобщена на релятивистские электронные пучки. Однако указанные исследования ограничены приближением нулевой продольной составляющей волнового вектора и поэтому относятся, строго говоря, только к бесконечно длинным системам. Предпринятую в работе /5/ попытку учесть конечную длину системы нельзя считать полностью успешной, так как полученное в ней дисперсионное уравнение основано на потенциальности поля возмущений в системе покоя пучка и неполностью учитывает непотенциальные слагаемые с конечной продольной составляющей волнового вектора. Это обстоятельство привело к неточному условию развития диокотронной неустойчивости в системах конечной длины.

В настоящей работе получено и исследовано дисперсионное уравнение, описывающее диокотронную неустойчивость трубчатого релятивистского электронного пучка в непотенциальном приближении и с учетом конечной продольной составляющей волнового вектора. В равновесном состоянии поток электронов с внутренним радиусом R_0 и внешним радиусом R_p распространяется в цилиндрическом волноводе радиуса $R_c > R_p > R_0$, помещенном во внешнее продольное магнитное поле $\vec{B}_0$. Продольная составляющая скорости электронов $u_\parallel$ и их плотность n_b постоянны в поперечном сечении пучка, причем границы пучка резкие.

2. Для получения дисперсионного уравнения, описывающего диокотронную неустойчивость, выразим электромагнитное поле возмущений через скалярный φ и векторный $\vec{A}$ потенциалы /6/

$$\Box\varphi = -4\pi\rho, \quad \Box\vec{A} = -(4\pi/c)\vec{j}. \tag{I}$$

Здесь $\Box$ – оператор Даламбера, а ρ и $\vec{j}$ – возмущенные плотности заряда и тока, c – скорость света. В условиях достаточно сильного магнитного поля, когда $|\omega - k_\parallel u_\parallel|^2$, $\omega_e^2(r) \ll \Omega^2\gamma^{-2}$, уравнения (I) расщепляются, причем интересующее нас уравнение для эффективного потенциала $\Phi = \varphi - (u_\parallel/c)A_z$ имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} - \frac{l^2}{r^2}\Phi - \left(k_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_\parallel^2(\omega - k_\parallel u_\parallel - l\omega_e)^2}\right]\Phi = $$
$$= -\frac{l}{r}\frac{\Phi}{\gamma_\parallel^2\Omega(\omega - k_\parallel u_\parallel - l\omega_e)}\frac{d\omega_b^2}{dr}. \tag{2}$$

Здесь $k_{\parallel}$ – продольное, l – азимутальное волновые числа, $\Omega = eB_0/mc$ – электронная циклотронная частота, $\omega_b = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2}$ ленгмюровская частота, $\gamma_{\parallel} = (1 - u_{\parallel}^2/c^2)^{-1/2}$, $\gamma = \left[1 - (u_{\parallel}/c)^2 - r^2\omega_e^2(r)/c^2\right]^{-1/2}$ – релятивистские факторы, $\omega_e(r) = \omega_D(1 - R_0^2/r^2)$ – угловая скорость вращения электронов в собственных электрическом и магнитном и внешнем продольном магнитном полях, $\omega_D = \omega_b^2/2\gamma_{\parallel}^2\Omega$, – e и m – заряд и масса электрона. Предполагается, что азимутальное движение нерелятивистское, т.е. $\omega_e^2(r) \ll c^2/\gamma_{\parallel}^2 r^2$ и можно пренебречь собственным магнитным полем пучка.

Уравнение (2) отличается от соответствующего уравнения работы /5/ последним слагаемым в левой части. Легко можно показать, что если этот член велик, то пучок устойчив. Обратное условие является необходимым для существования диокотронной неустойчивости и при $|\omega - k_{\parallel}u_{\parallel} - l\omega_e| \approx l\omega_e(R_p)$ (справедливость этого соотношения будет показана ниже) имеет вид:

$$|k_{\parallel}^2 - \omega^2/c^2| \ll 2(l + 1)(l^2/R_p^2)\gamma\omega_e(R_p)/\Omega. \qquad (3)$$

Приведем для сравнения аналогичные условия, полученные другими авторами. Так в работе /2/ записано сильно отличающееся от (3) условие $k_{\parallel}^2$, $\omega^2/c^2 \ll l^2/R_p^2$, позволяющее на самом деле пренебречь только единицей в квадратных скобках в уравнении (2). Соотношение $k_{\parallel}^2 \ll (\gamma\gamma_{\parallel}^2/R_p^2)l^2\omega_e(R_p)/2\Omega$ работы /5/ близко к /4/ (но отличается множителем $4(l + 1)$) только в частном случае $\omega \approx k_{\parallel}u_{\parallel} \gg l\omega_e(R_p)$.

3. Найдем теперь дисперсионное соотношение диокотронной неустойчивости с учетом последнего члена левой части уравнения (2), полагая его малым. При этом решение уравнения (2) в области пучка $R_0 < r < R_p$ записывается в виде /7/:

$$\Phi(r) = A[1 + \alpha(r)]r^l + B[1 + \beta(r)]r^{-l},$$

где A и B – константы, а малые функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ могут быть найдены методом последовательных приближений. Сшивая эффективный потенциал $\Phi(r)$ на границах пучка $r = R_0$, R_p и поступая аналогично работам /I,2/, окончательно получим дисперсионное уравнение диокотронной неустойчивости

$$\left(\frac{\omega - k_{\parallel} u_{\parallel}}{\omega_D}\right)^2 - a\,\frac{\omega - k_{\parallel} u_{\parallel}}{\omega_D} + b = 0, \qquad (4)$$

в котором $a = a_0 + \delta a, \quad b = b_0 + \delta b,$

$$a_0 = l(1 - R_0^2/R_p^2) + (R_p^{2l} - R_0^{2l})/R_c^{2l},$$

$$b_0 = l(1 - R_0^2/R_p^2)(1 - R_0^{2l}/R_c^{2l}) - (1 - R_p^{2l}/R_c^{2l})(1 - R_0^{2l}/R_p^{2l}).$$

Величины δa и δb пропорциональны функциям $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ и являются малыми в нашем приближении.

4. При $\mathrm{Im}\, k_{\parallel} = 0$ из уравнения (4) находим временной инкремент нарастания возмущений

$$\mathrm{Im}\,\omega = (\mathrm{Im}\,\omega)_0\left[1 - k_{\parallel}^2 v_1^2/(\mathrm{Im}\,\omega)_0^2\right]^{1/2}, \qquad (5)$$

где $(\mathrm{Im}\,\omega)_0 = (\omega_D/2)(4b_0 - a_0^2)^{1/2}$, а $v_1^2 = \Omega R_p^2 \omega_e (R_p)/2(l + 1)\gamma\gamma_{\parallel}^2$.

Вследствие сносового характера диокотронной неустойчивости ее развития возможно, если инкремент нарастания возмущений превышает обратное время пролета электронов $\mathrm{Im}\,\omega > u_{\parallel}/L$, где L – длина системы. Полагая в выражении (I0) $k_{\parallel min} \approx \pi/L$, находим условие возбуждения неустойчивости

$$(\mathrm{Im}\,\omega)_0 L > (u_{\parallel}^2 + \pi^2 v_1^2)^{1/2}. \qquad (6)$$

При $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ уравнение (4) определяет пространственный инкремент усиления возмущений:

$$\mathrm{Im}\, k_{\parallel} = u_{\parallel}^{-1}(\mathrm{Im}\,\omega)_0\left[1 - \omega^2 v_1^2/(\mathrm{Im}\,\omega)_0^2 u_{\parallel}^2\right]^{1/2}. \qquad (7)$$

Коэффициент усиления возмущений пучка по амплитуде на длине системы L равен $\mathrm{ch}(\mathrm{Im}\, k_{\parallel} L)$, и усиление становится существенным, когда $\mathrm{Im}\, k_{\parallel} L > 1$. Если положить в (7) $\omega/u_{\parallel} \approx (\mathrm{Re}\, k_{\parallel})_{min} \approx \pi/L$, то в качестве критерия развития диокотронной неустойчивости опять получаем неравенство (6).

Сравнение двух членов в скобках правой части условия (6) показывает, что учет второго из них важен только при достаточно большом полном токе пучка I, когда

$$I \geq \frac{mu_{\parallel}^3}{e} \frac{l+1}{\pi^2} \gamma\gamma_{0\parallel}^4 \approx 1{,}7(l+1)\gamma\gamma_{0\parallel}(\gamma_{0\parallel}^2 - 1)^{3/2}, \text{ кА}. \qquad (8)$$

Поскольку ток некомпенсированного электронного пучка не может превышать предельный вакуумный, выполнение условия (8) невозможно.

Таким образом, увеличение продольной составляющей волнового вектора приводит к уменьшению временного и пространственного инкрементов нарастания возмущений. Однако это уменьшение является несущественным в условиях развития диокотронной неустойчивости в системах конечной длины при токах пучка, меньших предельного вакуумного тока.

Поступила в редакцию
27 декабря 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. R. H. Levy, Phys. Fluids, 8, N7, 1288 (1965).
2. H. S. Uhm, J. G. Siambis, Phys. Fluids, 22, N12, 2377 (1979).
3. E. Ott, J. M. Wersinger, Phys. Fluids, 23, N2, 324 (1980).
4. H. C. Chen, P. J. Palmadesso, Phys. Fluids, 24, N2, 357(1981).
5. В. С. Иванов и др., Физика плазмы, 7, № 4, 784 (1981).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, "Наука", М., 1973 г., с. 504.
7. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, "Наука", М., 1976,г., с. 576.