Краткие сообщения по физике № 1 1983

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ УРОВНЯМИ КВАЗИЭНЕРГИЙ

Е. В. Иванова, В. И. Манько

УДК 530.145

Получены коэффициенты Эйнштейна для переходов между уровнями квазиэнергий в случае периодических по времени квадратичных по координатам и импульсам систем.

При рассмотрении систем, гамильтонианы которых являются периодическими функциями времени, очень удобными оказываются понятия квазиэнергии (КЭ) и квазиэнергетических состояний (КЭС), обобщающие понятия энергии и энергетических состояний стационарных квантовых систем /1,2/. При построении КЭС квадратичных и некоторых неквадратичных систем, а также при расчете излучения этих систем весьма полезен метод интегралов движения /3,4/.

Для стационарных систем используются коэффициенты Эйнштейна. В настоящей работе проводится обобщение коэффициентов Эйнштейна на случай периодических по времени гамильтонианов и получены коэффициенты Эйнштейна для периодических квадратичных систем. Отметим, что некоторые аспекты этой задачи рассматривались в работе /2(1973)/. По аналогии со стационарным случаем будем полагать, что для периодических систем коэффициент Эйнштейна A характеризует среднюю за период вероятность спонтанных переходов между КЭС, а коэффициент Эйнштейна B – среднюю за период вероятность индуцированных переходов между этими состояниями.

Будем рассматривать систему N заряженных частиц, движущихся в периодическом по времени электромагнитном поле, описываемую гамильтонианом вида ($c = \hbar = 1$)

$$H(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{6N} B_{\alpha\beta}(t)Q_\alpha Q_\beta + \Phi(t) = \tilde{Q}B(t)\vec{Q} + \Phi(t), \qquad (I)$$

где $B(t) = B(t + T)$ – 6N-мерная симметрическая действительная периодическая матрица, $\Phi(t) = \Phi(t + T)$ – периодическая функция времени, а $\vec{Q}$ – 6N-мерный вектор, построенный по правилу: $Q_1 = p_1; \ldots; Q_{3N} = p_{3N}; Q_{3N+1} = q_1; \ldots; Q_{6N} = q_{3N}$, где $p_j = -i\partial/\partial q_j$; $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_{3N}) = (\vec{q}^{\,1}, \ldots, \vec{q}^{\,b}, \ldots, \vec{q}^{\,N})$, а $\vec{q}^{\,b}$ – оператор координат заряженной частицы с номером b.

Рассчитаем среднюю за период вероятность дипольных спонтанных переходов между КЭС системы (I). Используя интегралы движения $\vec{A}$ и $\vec{A}^+$, удовлетворяющие бозонным коммутационным соотношениям, построенные в работе /4/, запишем гамильтониан взаимодействия системы с полем излучения в виде

$$H_1(t) = -e\sum_{\lambda,\rho}\sqrt{\frac{2\pi}{L^3\omega_\lambda}}\,\vec{\sigma}_{\lambda\rho}(c_{\lambda\rho} + c^+_{\lambda\rho})\vec{V}(t); \qquad (2)$$

здесь e – заряд частиц (полагаем, что все частицы имеют одинаковые заряды); $c^+_{\lambda\rho}$ и $c_{\lambda\rho}$ – операторы рождения и уничтожения фотона с частотой ω_λ, волновым вектором $\vec{k}_\lambda$ и вектором поляризации $\vec{e}_{\lambda\rho}$; 3N-мерный вектор $\vec{\sigma}_{\lambda\rho} = \vec{e}_{\lambda\rho(1)}, \ldots, \vec{e}_{\lambda\rho(n)}$; L^3 – нормировочный объем; оператор $\vec{V}(t)$ определяется соотношением

$$\vec{V}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\Big[\exp(i\omega l t)\varkappa(l)\exp(-i\hat{\Omega}t)\vec{A}(t) + \qquad (3)$$

$$+ \exp(-i\omega l t)\varkappa^*(l)\exp(i\hat{\Omega}t)\vec{A}^+(t)\Big]; \quad \omega = 2\pi/T.$$

Раскроем обозначения, использованные при записи выражения (3). Для системы с гамильтонианом (I) можно построить 6N интегралов движения $I_\alpha(t)$ /3/:

$$\vec{I}(t) = \Lambda(t)\vec{Q}; \quad \Lambda(t) = \tilde{T}\exp\left(2i\int_0^t \sigma_2 B\,d\tau\right), \qquad (4)$$

где σ_2 – блочная матрица Паули.

Матрицантом классической системы, соответствующей квантовой системе (I), является матрица $\Lambda^{-1}(t)$ /4/. Для сильно устойчивой классической системы, такой, что собственные значения матрицы $\Lambda^{-1}(t)$ различны, в силу симплектичности матрицы $\Lambda(t)$ справедливы следующие соотношения /4/:

$$\tilde{\Lambda}(T)\vec{f}^{(j)} = \exp(i\omega_j)\vec{f}^{(j)}; \quad \omega_j > 0;$$

$$\vec{f}^{(3N+j)} = \vec{f}^{(j)*}, \quad \vec{f}^{(j)}\sigma_2\vec{f}^{(k)*} = \pm\,\delta_{j,k}; \tag{5}$$

$$\omega_j \neq \omega s/2; \quad \omega_j \pm \omega_k \neq \omega s; \quad j \neq k;$$

$$j = 1, \ldots, 3N; \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

здесь символ $\sim$ означает операцию транспонирования. Обозначим /4/

$$\Omega_j = \mathrm{sign}(\vec{f}^{(j)}\sigma_2\vec{f}^{(j)*})\omega_j/T;$$

$$\vec{F}^{(j)} = \begin{cases} \vec{f}^{(j)}, & \Omega_j > 0 \\ \vec{f}^{(j)*}, & \Omega_j < 0 \end{cases}; \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \Omega_{3N} \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$A_j(t) = \vec{I}(t)\vec{F}^{(j)}.$$

Собственные функции $|n_j; t\rangle$ операторов $A_j^+A_j$ являются КЭС /4/. В соответствии с теоремой Флоке-Ляпунова матрицант $\Lambda^{-1}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda^{-1}(t) = U(t)\exp\left[\frac{t}{T}\ln\Lambda^{-1}(T)\right], \tag{7}$$

где $U(t) = U(t + T)$ – периодическая симплектическая матрица, разлагающаяся в ряд Фурье; символом $U(l)$ обозначим Фурье-образ матрицы $U(t)$. Матрица $\varkappa(l)$, определяющая соотношение (3), запишется в виде

$$\tilde{x}(1) = 2i\left[B_1(U_2F_1^{+} - U_1F_2^{+}) + B_2(U_4F_1^{+} - U_3F_2^{+})\right], \qquad (8)$$

$$U(T) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_1^{*} & F_2^{*} \end{pmatrix}, \quad (F_1, F_2) = \begin{pmatrix} F_1^1 & \ldots & F_{6N}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_1^{3N} & \ldots & F_{6N}^{3N} \end{pmatrix}$$

Учитывая действие бозонных операторов $A_j(t)$ и $A_j^+(t)$ на КЭС $|n_j;\ t\rangle$:

$$A_j(t)|n_j;\ t\rangle = \sqrt{n_j}\,|n_j - 1;\ t\rangle \qquad (9)$$

получим выражение для средней за период вероятности дипольных спонтанных переходов с излучением фотона с частотой ω_λ, волновым вектором $\vec{k}_\lambda$, вектором поляризации $\vec{e}_{\lambda\rho}$ в элемент телесного угла do в направлении $\vec{k}_\lambda$ при переходах системы между КЭС $|\vec{n};\ t\rangle$ и $|\vec{m};\ t\rangle$ $(m_j \neq n_j;\ m_k = n_k;\ k \neq j)$:

$$W(\vec{k}_\lambda, \omega_\lambda, \vec{e}_{\lambda\rho}) = \frac{e^2\omega_\lambda}{2\pi} \sum_{j,l} \left|\vec{\eta}^{(j)}(l)\vec{\sigma}_{\lambda\rho}\right|^2 \times$$
$$\times \left[n_j\delta(n_j - 1, m_j)\delta(\omega l - \Omega_j + \omega_\lambda) + \right. \qquad (10)$$
$$\left. + (n_j + 1)\delta(n_j + 1, m_j)\delta(\omega l - \Omega_j - \omega_\lambda)\right],$$

где $\vec{\eta}^{(j)}(l)$ – строка с номером j матрицы $\tilde{x}(l)$.

Суммируя по поляризациям, запишем коэффициент Эйнштейна A для частоты перехода $\omega_\lambda = \omega l - \Omega_j > 0$ в виде

$$A = \frac{4}{3} e^2(\omega l - \Omega_j)(n_j + 1)|\vec{\eta}^{(j)}(l)|^2. \qquad (11)$$

Отметим, что коэффициент A обратно пропорционален среднему времени жизни системы в возбужденном состоянии, что в соответствии с соотношением неопределенности дает возможность оценить ширину соответствующих линий.

Аналогично, считая, что падающее излучение не поляризовано, и усредняя по всем направлениям поляризации, легко получить коэффициент Эйнштейна В для частоты перехода $\omega_\lambda = \omega l - \Omega_j$:

$$B = \frac{4}{3}\pi^2 e^2 \frac{n_j + 1}{(\omega l - \Omega_j)^2} \left|\vec{\eta}^{(j)}(l)\right|^2. \qquad (12)$$

Поступила в редакцию
2 июля 1982 г.

Литература

1. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ, 46, 776 (1964); В. И. Ритус, ЖЭТФ, 51, 1544 (1966).
2. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 51, 1492 (1966); УФН, 110, 139 (1973).
3. И. А. Малкин, В. И. Манько, Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., "Наука", 1979 г.
4. Е. В. Иванова, И. А. Малкин, В. И. Манько, Краткие сообщения по физике ФИАН № 3, 3 (1977); J. Phys., 10 A, L 75 (1977).