УДК 621.315.592; 537.311.322

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ В МНОГОДОЛИННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В. А. Чуенков

Детально исследована ударная ионизация в анизотропных многодолинных полупроводниках (Ge, Si, $GaAs$) с учетом их реальной зонной структуры, анизотропии эффективной массы, перераспределения электронов (дырок) между долинами. Получены аналитические выражения, описывающие зависимость коэффициентов ударной ионизации электронов и дырок от электрического поля, температуры и параметров, характеризующих физические свойства полупроводников. Вычислены критические электрические поля E_c, при которых происходит электрический пробой полупроводников и диэлектриков; получена зависимость E_c от температуры.

В общем виде кинетическая теория ударной ионизации в многодолинных полупроводниках и диэлектриках была построена в [1, 2]. В [1] был получен критерий электрического пробоя многодолинных полупроводников и диэлектриков. В данной работе делается детальный анализ теории применительно к конкретным полупроводникам (Ge, Si, $GaAs$) и щелочно-галоидным кристаллам.

Германий. Германий является многодолинным полупроводником. Экстремумы долин зоны проводимости Ge расположены в различных точках зоны Бриллюэна и занимают различное положение на энергетической шкале. Экстремумы четырех L-долин находятся в точках, расположенных на границе зоны Бриллюэна в направлениях [111], и занимают одинаковое положение на энергетической шкале. В этих долинах зависимость энергии электронов от импульса

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_\perp^2}{2m_{L\perp}} + \frac{p_\parallel^2}{2m_{L\parallel}}, \tag{1}$$

где $p_\perp$ и $p_\parallel$ – поперечный и продольный импульсы электрона, $m_{L\perp}$ и $m_{L\parallel}$ – поперечная и продольная эффективные массы электрона в L-долинах.

Экстремум Г-долины зоны проводимости находится в центре зоны Бриллюэна, а на энергетической шкале он расположен выше экстремумов L-долин на 0.12 – 0.13 *эВ*. В Г-долине

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta_\Gamma \left(1 + \frac{p^2}{m_\Gamma \Delta_\Gamma}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

где m_Γ – эффективная масса электрона в окрестности экстремума, Δ_Γ – полуширина запрещенной зоны в Г-точке ($\Delta_\Gamma = \varepsilon_{g\Gamma}/2$).

Экстремумы шести X-долин расположены на осях [100] в точках $k \approx 0.8k_{max}$ (k_{max} – граничная точка зоны Бриллюэна в направлениях [100]), а на энергетической шкале расположены выше экстремумов L-долин на 0.17 – 0.18 *эВ*. Другие долины зоны проводимости нас интересовать не будут, поскольку их экстремумы на энергетической шкале расположены существенно выше экстремумов L-, Г-, X-долин. Функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ в X-долинах получается из (1) заменой $m_{L\perp}$ и $m_{L\parallel}$ соответственно на $m_{X\perp}$ и $m_{X\parallel}$.

Экстремумы долин валентной зоны *Ge* (долины легких и тяжелых дырок, а также долина, соответствующая спин-орбитально отщепленной подзоне) находятся в центре зоны Бриллюэна. Будем предполагать, что в долинах валентной зоны

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_p}, \tag{3}$$

где m_p – эффективная масса дырок. Здесь и в дальнейшем величины, относящиеся к дыркам, будем снабжать индексом "p".

Рассмотрим процессы ударной ионизации в перечисленных выше долинах зоны проводимости и валентной зоны.

Процесс ударной ионизации, при котором взаимодействие быстрого электрона L-долины зоны проводимости с медленным электроном валентной зоны приводит к рождению двух медленных электронов в L-долине и одной медленной дырки в валентной зоне (непрямая ударная ионизация) возможен лишь при участии фонона с большим импульсом. Вероятность такого процесса, вычисленная во втором приближении теории квантовых переходов, равна

$$W_{iL}^{indir}(\varepsilon) = g_{0L} \cdot \tau_{0L}(\varepsilon_{gL}) \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{gL}}{\varepsilon_{gL}}\right)^2, \tag{4}$$

где ε_{gL} – пороговая энергия ударной ионизации для электронов L-долин, равная ширине запрещенной зоны в L-точках; $\tau_{0L}(\varepsilon_{gL})$ – время релаксации импульса электронов в L-долинах при $\varepsilon = \varepsilon_{gL}$, температуре $T_0 = 0$;

$$g_{0L} = \frac{\pi\hbar^4(\hbar\omega_{j0})^{-1/2} \cdot W_{jl} \cdot \tau_{0L}(\varepsilon_{gL})}{\sqrt{2}a^3 m_p^{3/2}(\varepsilon_{gL} + p_{j0}^2/2m_p)^2} \times$$

$$\times \left\{N(\omega_{j0}) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right\} \cdot \frac{me^4}{\hbar^3}; \tag{5}$$

$$\tau_{0L}(\varepsilon_{gL}) = l_{0L} \cdot \sqrt{\frac{m_L}{2\varepsilon_{gL}}},\ l_{0L} = \frac{2\pi\hbar^3\rho_0\omega_0}{\mathcal{D}_L^2\mathcal{K}^2 m_L^2}; \tag{6}$$

l_{0L} – длина свободного пробега электронов; $\hbar$ – постоянная Планка; $W_{jl} \cdot \left\{N(\omega_{j0}) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right\}$ – вероятность перехода дырки из промежуточного состояния j в валентной зоне в конечное состояние l в той же зоне в результате испускания (поглощения) фонона с большим импульсом p_{j0} и энергией $\hbar\omega_{j0}$; $N(\omega_{j0})$ – число фононов с энергией $\hbar\omega_{j0}$; a – постоянная решетки; m_p – эффективная масса дырки; m – некоторое среднее значение массы между массой плотности состояний $m_L = (m_{L\perp}^2 \cdot m_{L\|})^{1/3}$ и массой дырки m_p; e – заряд электрона; ρ_0 – плотность; ω_0 – частота оптического фонона; $\mathcal{D}_L$ – константа деформационного потенциала; $\mathcal{K} = 2\pi/a$. При выводе (4) были использованы соображения, высказанные в [3]. Вероятность ударной ионизации электронами Г-долины зоны проводимости (прямая ударная ионизация) определяется выражением [см. (2) и [3]]

$$W_{i\Gamma}^{dir}(\varepsilon) = \frac{g_{0\Gamma}}{\tau_{0\Gamma}(\varepsilon_{i\Gamma})}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{i\Gamma}}{\varepsilon_{i\Gamma}}\right)^2,\ g_{0\Gamma} = \frac{m^* e^4}{\hbar^3}\left(\frac{\varepsilon_{i\Gamma}}{\Delta_\Gamma}\right)^3 \cdot \tau_{0\Gamma}(\varepsilon_{i\Gamma}), \tag{7}$$

в котором $\varepsilon_{i\Gamma} = 3.66\Delta_\Gamma \approx 1.56$ *эВ* – пороговая энергия ударной ионизации для электронов Г-долины; $\tau_{0\Gamma}(\varepsilon_{i\Gamma})$ – время свободного пробега электронов в Г-долине при $\varepsilon = \varepsilon_{i\Gamma}$, $T_0 = 0$; m^* – некоторое среднее значение массы между m_Γ и m_p.

Если ударная ионизация осуществляется дырками валентной зоны, то вместо формул (7), (4) – (6) получим соответственно [см. (3)]

$$W_{ip}^{dir}(\varepsilon) = \frac{g_{0p}}{\tau_{0p}(\varepsilon_{ip})}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{ip}}{\varepsilon_{ip}}\right)^2,$$

$$g_{0p} = \frac{m^* e^4}{\hbar^3} \tau_{0p}(\varepsilon_{ip}), \ \varepsilon_{ip} = \varepsilon_{i\Gamma} \left(1 + 2\frac{m_p}{m_\Gamma}\right) \left(1 + \frac{m_p}{m_\Gamma}\right)^{-1},$$

$$\tau_{0p}(\varepsilon_{ip}) = l_{0p} \sqrt{\frac{m_p}{2\varepsilon_{ip}}}, \ l_{0p} = \frac{2\pi\hbar^3 \rho_0 \omega_0}{\mathcal{D}_p^2 \mathcal{K}^2 m_p^2}; \tag{8}$$

$$W_{ip}^{indir}(\varepsilon) = g_{0p}^* \cdot \tau_{0p}^{-1}(\varepsilon_{gL}) \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{gL}}{\varepsilon_{gL}}\right)^2,$$

$$g_{0p}^* = \frac{\pi\hbar^4 (\hbar\omega_{j0}^*)^{-1/2} \cdot W_{jl}^* \cdot \tau_{0p}(\varepsilon_{gL})}{\sqrt{2} a^3 m_L^{3/2} (2\varepsilon_{gL} + p_{j0}^{*2}/2m_L)^2} \times \tag{9}$$

$$\times \left\{ N(\omega_{j0}^*) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\} \cdot \frac{m^* e^4}{\hbar^3}.$$

В (8), (9) приняты следующие дополнительные обозначения: $\tau_{0p}(\varepsilon_{ip})$ – время свободного пробега дырок с пороговой энергией ударной ионизации ε_{ip}; l_{0p} – длина свободного пробега дырок; $W_{jl}^* \left\{ N(\omega_{j0}^*) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\}$ – вероятность перехода электронов из промежуточного состояния j в L-долине зоны проводимости в конечное состояние l в той же долине в результате испускания (поглощения) фонона с большим импульсом p_{j0}^* и энергией $\hbar\omega_{j0}^*$; $N(\omega_{j0}^*)$ – число фононов с энергией $\hbar\omega_{j0}^*$; $\mathcal{D}_p$ – константа деформационного потенциала.

Используя выражения (1), (2), (4) – (7) и метод решения кинетического уравнения, изложенный в [4 – 6], можно показать, что изотропные части функций распределения электронов, средние значения вероятностей ударной ионизации и рекомбинации в L-, Γ-, X-долинах зоны проводимости определяются соответственно соотношениями (индексы L, Γ, X относятся соответственно к L-, Γ-, X-долинам):

$$f_{L\alpha}(\varepsilon) = I_{L\alpha}^{-1}(F_{L\alpha}) \cdot \exp\left(-\frac{E_{0L}^2}{F_{L\alpha}^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gL}}\right), \ (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

$$I_{L\alpha}(F_{L\alpha}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{m_L^{3/2} \cdot \varepsilon_{gL}^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{F_{L\alpha}}{E_{0L}}\right)^3, \tag{10}$$

$$W_{iL\alpha}(F_{L\alpha}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{g_{0L}}{\tau_{0L}(\varepsilon_{gL})} \left(\frac{F_{L\alpha}}{E_{0L}}\right)^3 \cdot \exp\left(-\frac{E_{0L}^2}{F_{L\alpha}^2}\right), \tag{11}$$

$$W_{rL\alpha}(F_{L\alpha}) = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_{gL}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{E_{0L}}{F_{L\alpha}}\right)^3 \cdot \tau_{rL}^{-1}, \tag{12}$$

$$E_{0L}^2 = \frac{3\hbar\omega_0 \varepsilon_{gL}}{(el_{0L})^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0},\ \beta_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2T_0},\ K_{0L} = \frac{m_{L\parallel}}{m_{L\perp}}, \tag{13}$$

$$F_{L\alpha}^2 = \frac{m_L}{m_{L\parallel}} \cdot \left\{ \frac{2K_{0L}+1}{3} E^2 - \frac{2(K_{0L}-1)}{3} \cdot \begin{bmatrix} + & & + & & + & \\ - & E_x E_y & - & E_x E_z & + & E_y E_z \\ + & & - & & - & \\ - & & + & & - & \end{bmatrix} \right\}; \tag{14}$$

$$f_\Gamma(\varepsilon) = I_\Gamma^{-1}(E) \cdot \exp\left\{ -\frac{E_{0\Gamma}^2}{E^2} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i\Gamma}}{\Delta_\Gamma} \right)^5 - 1 \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_\Gamma} \right)^5 - 1 \right] \right\}, \tag{15}$$

$$I_\Gamma(E) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{8}{5}\right) \cdot \frac{(m_\Gamma \Delta_\Gamma)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\varepsilon_{i\Gamma}}{\Delta_\Gamma} \right)^3 \cdot \left(\frac{E}{E_{0\Gamma}} \right)^{6/5},$$

$$W_{i\Gamma}(E) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(3g_{0\Gamma})^{1/4}}{4 \cdot \Gamma(8/5)} \cdot \left(\frac{3}{5} \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_{i\Gamma}} \right)^{3/4} \cdot \left(1 - \frac{\Delta_\Gamma^2}{\varepsilon_{i\Gamma}^2} \right)^{1/2} \times \tag{16}$$

$$\times \tau_{0\Gamma}^{-1}(\varepsilon_{i\Gamma}) \cdot \left(\frac{E}{E_{0\Gamma}} \right)^{3/10} \cdot \exp\left(-\frac{E_{0\Gamma}^2}{E^2} \right),$$

$$W_{r\Gamma}(E) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{3}{\Gamma(8/5)} \cdot \left(\frac{\hbar\omega_0 \Delta_\Gamma}{\varepsilon_{i\Gamma}^2} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{E_{0\Gamma}}{E} \right)^{6/5} \cdot \frac{1}{\tau_{r\Gamma}}, \tag{17}$$

$$E_{0\Gamma}^2 = \frac{3}{5} \frac{\hbar\omega_0 \cdot \Delta_\Gamma}{(el_{0\Gamma})^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0} \left(\frac{\varepsilon_{i\Gamma}}{\Delta_\Gamma} \right)^5,$$

$$\tau_{0\Gamma}(\varepsilon_{i\Gamma}) = l_{0\Gamma} \cdot \frac{\Delta_\Gamma}{\varepsilon_{i\Gamma}} \sqrt{\frac{m_\Gamma}{\Delta_\Gamma}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{i\Gamma}^2}{\Delta_\Gamma^2} - 1 \right)^{-1/2},\ l_{0\Gamma} = \frac{2\pi\hbar^3 \rho_0 \cdot \omega_0}{\mathcal{D}_\Gamma^2 \mathcal{K}^2 m_\Gamma^2}; \tag{18}$$

$$f_{X\gamma}(\varepsilon) = I_{X\gamma}^{-1}(F_{X\gamma}) \cdot \exp\left(-\frac{S_{X\gamma} \cdot \varepsilon}{el_{0X} \cdot F_{X\gamma} \cdot \mathrm{th}\beta_0} \right),$$

$$I_{X\gamma}(F_{X\gamma}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{(m_X \hbar\omega_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \left[1 + \frac{9}{4\delta_{X\gamma}} \cdot \left(1 + \frac{3}{4\delta_{X\gamma}} \right) \right], \tag{19}$$

$$\delta_{X\gamma} = \frac{S_{X\gamma} \cdot \hbar\omega_0 \cdot [N(\hbar\omega_0) + 1]}{el_{0X} \cdot F_{X\gamma}},\ l_{0X} = \frac{2\pi\hbar^3 \rho_0 \omega_0}{\mathcal{D}_X^2 \cdot \mathcal{K}^2 \cdot m_X^2},$$

$$W_{rX\gamma} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(m_X \hbar\omega_0)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3 \cdot I_{X\gamma}(F_{X\gamma})} \tau_{rX}^{-1}, \tag{20}$$

$$F_{X1}^2 = F_{X2}^2 = \frac{m_X}{m_{X\|}} \cdot \left\{K_{0X}(E_x^2 + E_y^2) + E_z^2\right\},\ K_{0X} = \frac{m_{X\|}}{m_{X\perp}},$$

$$F_{X3}^2 = F_{X4}^2 = \frac{m_X}{m_{X\|}} \cdot \left\{K_{0X}(E_x^2 + E_z^2) + E_y^2\right\}, \tag{21}$$

$$F_{X5}^2 = F_{X6}^2 = \frac{m_X}{m_{X\|}} \cdot \left\{K_{0X}(E_y^2 + E_z^2) + E_x^2\right\}.$$

В (10) – (21) приняты дополнительные обозначения: $F_{L\alpha}(\alpha = 1,2,3,4)$ и $F_{X\gamma}(\gamma = 1,2,3,4,5,6)$ – эффективные электрические поля соответственно в L- и X-долинах [см. (14) и (21)]; первая сверху строка знаков в (14) соответствует первой долине, вторая строка знаков – второй долине, и т.д.; E_x, E_y, E_z – компоненты вектора электрического поля $\mathbf{E}$ в системе координат, оси которой совпадают с осями [100] кристаллической решетки; m_X – масса плотности состояний в X-долинах; $N(\hbar\omega_0)$ – число фононов с энергией $\hbar\omega_0$; τ_{rL}, $\tau_{r\Gamma}$, τ_{rX} – рекомбинационные времена жизни электронов в L-, Γ-, X-долинах в условиях термодинамического равновесия ($E \to 0$). Подчеркнем, что выражения для функций распределения электронов, вероятностей ударной ионизации и рекомбинации в (10) – (21) справедливы в той области электрических полей, в которой проводились эксперименты ($10^5 - 10^6$ *В/см*). Вероятность ударной ионизации электронами X-долин в этой области полей пренебрежимо мала, поскольку электроны этих долин обладают сравнительно большой эффективной массой и сравнительно малой длиной свободного пробега ($l_{0X} \approx 10^{-7}$ *см*). В этом случае в (19) функция $S_{X\gamma} \approx 1$ при $T_0 < el_{0X}F_{X\gamma}\mathrm{th}\beta_0 < \hbar\omega_0$, $S_{X\gamma} = el_{0X}F_{X\gamma}\mathrm{th}\beta_0/T_0$ при $el_{0x}F_{X\gamma}\mathrm{th}\beta_0 < T_0$.

Усредненная по всем долинам вероятность ударной ионизации электронами в германии вычисляется, как показано в [1], по формулам [см. (10) – (21)]

$$W_{in}(E) = W_{i\Gamma} \cdot \frac{N_\Gamma}{N} + \sum_{\alpha=1}^{4} W_{iL\alpha} \cdot \frac{N_{L\alpha}}{N}, \tag{22}$$

$$\frac{N_\Gamma}{N} = \left\{1 + \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{W_{\Gamma L\alpha}^{ef}}{W_{L\alpha\Gamma}^{ef}} + \sum_{\gamma=1}^{6} \frac{W_{\Gamma X\gamma}^{ef}}{W_{X\gamma\Gamma}^{ef}}\right\}^{-1}, \tag{23}$$

$$\frac{N_{L\alpha}}{N} = \left\{\sum_{\beta=1}^{4} \frac{W_{L\alpha L\beta}^{ef}}{W_{L\beta L\alpha}^{ef}} + \frac{W_{L\alpha\Gamma}^{ef}}{W_{\Gamma L\alpha}^{ef}} + \sum_{\gamma=1}^{6} \frac{W_{L\alpha X\gamma}^{ef}}{W_{X\gamma L\alpha}^{ef}}\right\}^{-1}. \tag{24}$$

В (22) – (24) N_Γ и $N_{L\alpha}$ – концентрация электронов соответственно в Г-долине и в L-долине под номером α, N – полная концентрация электронов в зоне проводимости, $W^{ef}_{L\alpha L\beta}$, $W^{ef}_{L\alpha\Gamma}$, $W^{ef}_{L\alpha X_\gamma}$ и т.д. – вероятности междолинного рассеяния электронов на фононах, выражения для которых легко получаются с помощью формул, приведенных в [1]. Например,

$$W^{ef}_{L\alpha X_\gamma} = \int\limits_{\Delta_m}^{\infty} \left\{ \frac{N_{LX}+1}{\tau^{ef}_{LX}(\varepsilon+\hbar\omega_{LX})} \cdot f_{L\alpha}(\varepsilon+\hbar\omega_{LX})\rho_x(\varepsilon) + \right.$$
$$\left. + \frac{N_{LX}}{\tau^{ef}_{LX}(\varepsilon)} f_{L\alpha}(\varepsilon)\rho_x(\varepsilon+\hbar\omega_{LX}) \right\} d\varepsilon. \tag{25}$$

Здесь $f_{L\alpha}(\varepsilon)$ – функция распределения электронов в $L\alpha$-долине [см. (10), (14)]; Δ_m – наибольшая из энергий Δ_L и Δ_X, характеризующих положение L- и X-долин относительно начала отсчета на энергетической шкале;

$$\tau^{ef}_{LX}(\varepsilon) \sim \rho_L(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}\cdot m_L^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{1/2} \tag{26}$$

– время междолинной релаксации, соответствующее переходу электрона из L-долины в X-долину в результате взаимодействия с фононом, энергия которого равна $\hbar\omega_{LX}$;

$$N_{LX} = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{LX}}{T_0}\right) - 1\right]^{-1}; \tag{27}$$

$$\rho_X = \frac{\sqrt{2}\cdot m_X^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{1/2},\ \rho_\Gamma(\varepsilon) = \frac{m_\Gamma^{3/2}\cdot\varepsilon}{\pi^2\hbar^3\Delta_\Gamma^{1/2}}\cdot\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta_\Gamma^2}-1\right)^{1/2}, \tag{28}$$

$\rho_L(\varepsilon)$ – плотности состояний соответственно в X-, Г- и L-долинах. Выражения для других вероятностей междолинного рассеяния получаются из (25) заменой индексов. Например, вероятность перехода электрона из Г-долины в $X\gamma$-долину получается из (25) заменой индексов $L\alpha$ и L на индекс Г. Заменив в (22) индекс i на индекс r и добавив в правую часть

$$\sum_{\gamma=1}^{6} W_{rX_\gamma}\cdot\frac{N_{X_\gamma}}{N},$$

получим усредненную по всем долинам вероятность рекомбинации электронов $W_{rn}(E)$.

Итак, формулы (10) – (28) дают возможность вычислить вероятности ударной ионизации и рекомбинации при произвольном направлении электрического поля.

В интересующей нас области электрических полей вероятности междолинных переходов из Г-долины в L- и X-долины, как показывают оценки, значительно превышают вероятности обратных переходов (в Г-долине более разогретый электронный газ и значительно меньше плотность состояний электронов). Это приводит к тому, что первое слагаемое в (22) оказывается пренебрежимо малым по сравнению с последующими слагаемыми ($N_\Gamma/N \approx 10^{-2} - 10^{-3}$). Следовательно, коэффициент ударной ионизации электронов $\alpha(E)$ может быть вычислен по формуле

$$\alpha(E) = W_{in}(E)/u_n = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{W_{iL\alpha}}{u_n} \cdot \frac{N_{L\alpha}}{N}, \tag{29}$$

где скорость дрейфа электронов

$$u_n = \left(\frac{8}{3\pi} \frac{\hbar\omega_0 \cdot \mathrm{th}\beta_0}{m_L}\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Численные расчеты по формуле (29) [см. (10) – (28), (30)] показали, что с точностью до нескольких процентов (в пределах погрешности эксперимента) коэффициент ударной ионизации электронов в германии не зависит от направления электрического поля. Рассчитанная по формуле (29) теоретическая зависимость $\alpha(E)$ при $T_0 = 300\,K$ представлена в таблице 1. Там же приведены экспериментальные значения $\alpha(E)$, полученные в [7].

Рассмотрим теперь процесс ударной ионизации в валентной зоне германия. Анализ различных вариантов расчета показал, что экспериментально наблюдаемую зависимость коэффициента ударной ионизации дырок от электрического поля можно объяснить лишь при условии, что ударная ионизация в валентной зоне германия является непрямой и осуществляется в основном тяжелыми дырками. При этом условии вероятности ударной ионизации и рекомбинации дырок в германии описываются формулами [см. (9) – (13)]

$$W_{ip}(E) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{g_{0p}^*}{\tau_{0p}(\varepsilon_{gL})} \left(\frac{E}{E_{0p}}\right)^3 \cdot \exp\left(-\frac{E_{0p}^2}{E^2}\right), \tag{31}$$

$$W_{rp}(E) = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_{gL}}\right)^{3/2} \left(\frac{E_{0p}}{E}\right)^3 \cdot \tau_{rp}^{-1}, \; E_{0p}^2 = \frac{3\hbar\omega_0\varepsilon_{gL}}{(el_{0p})^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0}. \tag{32}$$

Таблица 1

Коэффициенты ударной ионизации электронов и дырок в полупроводниках

Германий ($T_0 = 300\,K$)						
$E \cdot 10^{-5}$, $\frac{В}{см}$	1.325	1.5	1.75	2	2.5	2.7
$\beta(E)$, $см^{-1}$ теория	$7.7 \cdot 10^2$	$2.4 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.9 \cdot 10^4$	$6.6 \cdot 10^4$	$9.5 \cdot 10^4$
$\beta(E)$, $см^{-1}$ экспер.	$8 \cdot 10^2$	$2.5 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$6.5 \cdot 10^4$	$9.5 \cdot 10^4$
$\alpha(E)$, $см^{-1}$ теория	$3.4 \cdot 10^2$	$1.15 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$9.1 \cdot 10^3$	$2.8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$
$\alpha(E)$, $см^{-1}$ экспер.	$3 \cdot 10^2$	$1.20 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	10^4	$3 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$
Кремний ($T_0 = 300\,K$)						
$E \cdot 10^{-5}$, $\frac{В}{см}$	2	3	4	5	6.3	10
$\alpha(E)$, $см^{-1}$ теория	$2.68 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$2.2 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$1.4 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^5$
$\alpha(E)$, $см^{-1}$ экспер.	$2.3 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	–
$\beta(E)$, $см^{-1}$ теория	$0.8 \cdot 10^2$	$1.7 \cdot 10^3$	$7.6 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$5.3 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^5$
$\beta(E)$, $см^{-1}$ экспер.	10^2	$1.7 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$4.3 \cdot 10^4$	–
Арсенид галлия ($T_0 = 300\,K$)						
$E \cdot 10^{-5}$, $\frac{В}{см}$	2	2.5	3	4	5	6
$\alpha(E)$, $см^{-1}$ теория	4.7	90	10^3	10^4	$4 \cdot 10^4$	10^5
$\beta(E)$, $см^{-1}$ теория	4.4	87	10^3	10^4	$4 \cdot 10^4$	10^5
$\alpha(E) = \beta(E)$ экспер.	5	95	10^3	10^4	$4 \cdot 10^4$	10^5

Анизотропия $\alpha(E)$ в $GaAs$			
$E \cdot 10^{-5}$, $\frac{В}{см}$	3.85	3	2
$\alpha_{100}/\alpha_{111}$	1.3	1.72	5.73

Таблица 2

Параметры полупроводников, использованные при проведении численных расчетов

	$\hbar\omega_{j0}$, эВ	$\hbar\omega^*_{j0}$, эВ	W_{jl}, c^{-1}	W^*_{jl}, c^{-1}	p_{j0}, $\pi\hbar/a$	p^*_{j0}, $\pi\hbar/a$
Ge	0.037	0.037	$10^{10}-10^{11}$	$10^{10}-10^{11}$	1	1
Si	0.058	0.058	$10^{10}-10^{11}$	$10^{10}-10^{11}$	0.53	0.34
$GaAs$	$\lesssim 0.036$	$\lesssim 0.036$	$10^{10}-10^{12}$	$10^{10}-10^{12}$	0.53	0.58

Таблица 3

Значения E_c, $\mathcal{D}(E_c)$, g_0, m/m_0 для щелочно-галоидных кристаллов ($T_0 = 300\,K$)

	$E_c\cdot 10^{-6}$, $\frac{B}{см}$	$\mathcal{D}(E_c)$	g_0	m/m_0 (автор)	m/m_0 (С. И. Пекар)
LiF	3.1	16.25	46	1.04	–
NaF	2.4	17.34	366	1.92	–
KF	1.9	17.29	324	1.79	–
$NaCl$	1.5	17.33	696	2.44	2.78
KCl	1.00	17.00	861	1.98	1.85
$RbCl$	0.83	17.01	640	1.69	1.78
$NaBr$	0.81	16.86	684	1.9	2.96
KBr	0.70	16.99	947	1.79	1.87
$RbBr$	0.63	16.94	1114	1.77	1.70
NaJ	0.70	16.55	907	1.94	3.25
KJ	0.57	16.59	1558	2.03	2.11
RbJ	0.50	16.57	1626	1.81	1.89

Вычисленная с помощью (31) зависимость коэффициента ударной ионизации дырок $\beta(E) = W_{ip}(E)/u_p$ при $T_0 = 300\,K$ представлена в таблице 1 (скорость дрейфа дырок u_p получается из (30) заменой m_L на m_p). Экспериментальные значения $\beta(E)$ получены в [7].

Кремний. Ударная ионизация в зоне проводимости кремния осуществляется электронами X-долин (непрямая ударная ионизация), расположение которых в импульсном пространстве такое же, как расположение X-долин зоны проводимости германия. Экстремумы других долин зоны проводимости кремния на энергетической шкале расположены значительно выше экстремумов X-долин. Вероятности ударной ионизации и рекомбинации в X-долинах описываются формулами

$$W_{iX\gamma}(F_{X\gamma}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{g_{0X}}{\tau_{0X}(\varepsilon_{gX})} \left(\frac{F_{X\gamma}}{E_{0X}}\right)^3 \cdot \exp\left(-\frac{E_{0X}^2}{F_{X\gamma}^2}\right), \tag{33}$$

$$W_{rX\gamma}(F_{X\gamma}) = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_{gX}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{E_{0X}}{F_{X\gamma}}\right)^3 \cdot \tau_{rX}^{-1},\ E_{0X}^2 = \frac{3\hbar\omega_0 \cdot \varepsilon_{gX}}{(el_{0X})^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0}, \tag{34}$$

где $\gamma = 1-6$; ε_{gX} – ширина запрещенной зоны в X-точках; $F_{X\gamma}$ определяются соотношениями (21); g_{0X}, $\tau_{0X}(\varepsilon_{gX})$, l_{0X} определяются соотношениями (5), (6), в которых индекс L заменяется на X. Физический смысл всех входящих в (33), (34) величин тот же, что и в германии; различны лишь их численные значения. Функции распределения электронов в X-долинах получаются из (10) заменой индексов $L\alpha$ и L соответственно на индексы $X\gamma$ и X, а отношения вероятностей переходов электронов между X-долинами, вычисленные с помощью этих функций [см. [1], а также формулы (25) – (28) и текст перед ними], описываются формулами

$$W_{\gamma\beta}^{ef}/W_{\beta\gamma}^{ef} = \frac{F_\gamma}{F_\beta} \frac{2+a_\gamma}{2+a_\beta} \cdot \frac{(N_{XX}+1)e^{-a_\gamma}+N_{XX}}{(N_{XX}+1)e^{-a_\beta}+N_{XX}}, \tag{35}$$

$$a_\gamma = \frac{3\hbar\omega_0 \cdot \hbar\omega_{XX}}{(el_{0X}F_\gamma)^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0},\ a_\beta = \frac{3\hbar\omega_0 \cdot \hbar\omega_{XX}}{(el_{0X}F_\beta)^2 \cdot \mathrm{th}\beta_0}, \tag{36}$$

где $\hbar\omega_{XX}$ – энергия фононов, участвующих в переходах между X-долинами; N_{XX} – число таких фононов. В (35), (36) мы опустили индекс X у величин $W_{X\gamma X\beta}^{ef}$, $W_{X\beta X\gamma}^{ef}$, $F_{X\gamma}$, $F_{X\beta}$, $a_{X\gamma}$, $a_{X\beta}$.

Как показано в [1], коэффициент ударной ионизации электронов в кремнии вычисляется по формуле

$$\alpha(E) = \sum_{\gamma=1}^{6} W_{i\gamma} \left(\sum_{\beta=1}^{6} \frac{W_{\gamma\beta}^{ef}}{W_{\beta\gamma}^{ef}}\right)^{-1} \cdot u_X^{-1}, \tag{37}$$

где u_X получается из (30) заменой m_L на m_X. Значения $\alpha(E)$, вычисленные по формуле (37) с помощью (33) – (36), (21), представлены в таблице 1. Экспериментальные значения $\alpha(E)$ получены в [8]. Вычисления показали также, что в области указанных в таблице электрических полей анизотропия $\alpha(E)$ практически отсутствует (в пределах погрешности эксперимента). При меньших значениях E анизотропия $\alpha(E)$ становится заметной. Например, при $E = 1.5 \cdot 10^5$ *В/см* отношение $\alpha_{100}/\alpha_{111} \approx 2.6$ (индексы у α указывают направление E).

Ударная ионизация в валентной зоне кремния является также непрямой и осуществляется в основном тяжелыми дырками. Значения $\beta(E) = W_{ip}(E)/u_p$, вычисленные по формулам (30), (31), приведены в таблице 1. Экспериментальные данные получены в [8].

Арсенид галлия. В зоне проводимости арсенида галлия мы рассмотрим Г-долину (экстремум находится в центре зоны Бриллюэна и занимает наинизшее положение на энергетической шкале), X-долины (экстремумы находятся на границе зоны Бриллюэна в направлениях [100]), L-долины (экстремумы находятся на границе зоны Бриллюэна в направлениях [111]). На энергетической шкале экстремумы L- и X-долин расположены выше экстремума Г-долины на 0.4 – 0.5 *эВ*. Экстремумы других долин расположены значительно выше экстремумов Г-, L-, X-долин. Переходя к вычислению коэффициентов ударной ионизации в $GaAs$, сделаем предварительно ряд замечаний. Заметим, во-первых, что электроны L-долин не принимают участия в процессе ударной ионизации, поскольку в них отсутствуют состояния с энергией, равной энергии ионизации [15]. Электроны Г-долины не дают заметного вклада в процесс ударной ионизации по трем причинам: 1) состояния с энергией, равной энергии ионизации $\varepsilon_{i\Gamma} \approx 2.7\,эВ$, существуют в этой долине лишь в направлении [100]; 2) численные оценки и эксперимент (эффект Ганна) показывают, что в электрическом поле $E \geq 10^4\,В/см$ подавляющая часть электронов Г-долины переходит в L- и X-долины в результате междолинного рассеяния на фононах (плотность состояний в L- и X-долинах превышает плотность состояний в Г-долине соответственно в 25 и 45 раз); 3) вероятность накопления электроном энергии $\varepsilon_{i\Gamma} = 2.7\,эВ$ при движении вдоль оси [100] в пролетном режиме на несколько порядков меньше вероятности перехода электрона из Г-долины в X-долину. Сделанные выше замечания и непосредственные вычисления показали, что экспериментально наблюдаемую зависимость коэффициентов ударной ионизации электронов и дырок от электрического поля в арсениде галлия можно объяснить лишь при условии, если ударная ионизация осуществляется в основном электронами X-долин зоны проводимости и тяжелыми дырками валентной зоны. Значения $\alpha(E)$, вычисленные по формуле (37) с помощью (33) – (36), (21) при $\mathbf{E}\|[111]$, и значения $\beta(E)$, вычисленные по формулам (31), (30), представлены в таблице 1. Экспериментальные результаты приведены в [9]. В арсениде галлия имеет место заметная анизотропия коэффициента ударной ионизации электронов $\alpha(E)$ [см. таблицу 1], что подтверждается и экспериментом [9].

Заметим, в заключение, что при вычислении коэффициентов ударной ионизации электронов и дырок в Ge, Si, $GaAs$ мы использовали в качестве подгоночных параметров две величины: длину свободного пробега электронов (дырок) при энергиях, превышающих энергию оптических фононов, и постоянный множитель g_0 (или g_0^*) в выражениях, описывающих зависимость вероятности ударной ионизации от энергии электрона (дырки) [см. (5) – (20)]. Указанные параметры подбирались таким образом, чтобы получить максимально возможное согласие теории с экспериментом [см. таблицу 1]. Подгоночные значения параметров оказались весьма близкими к значениям, вычисленным по приведенным в статье теоретическим формулам [см. (5) – (20)]. Значения других параметров полупроводников, в том числе температурная зависимость ширины запрещенной зоны $\varepsilon_g(T_0)$ в соответствующих экстремальных точках, взяты из [15] и таблицы 2. Заметим, наконец, что с изменением температуры коэффициенты ударной ионизации электронов и дырок остаются неизменными, если, как следует из всех приведенных выше теоретических выражений [см. (5) – (20)], выполняется соотношение

$$\frac{\varepsilon_g(T_0)}{E^2 \cdot \mathrm{tg}\beta_0} = \mathrm{const}, \quad (\beta_0 = \hbar\omega_0/2T_0),$$

определяющее температурную зависимость $\alpha(E)$ и $\beta(E)$ при фиксированном значении E.

Щелочно-галоидные кристаллы. Щелочно-галоидные кристаллы имеют простую кубическую структуру. Следовательно, можно предполагать, что в зоне проводимости этих кристаллов ударная ионизация осуществляется электронами одной долины с экстремумом в центре зоны Бриллюэна, занимающем на энергетической шкале наинизшее положение. Экстремум валентной зоны также находится в центре зоны Бриллюэна. Зависимость энергии электронов и дырок от импульса описывается формулой (3) с соответствующими значениями эффективных масс.

Все сказанное выше о структуре зон щелочно-галоидных кристаллов подтверждается в [10 – 14]. Есть также основания считать, что ширина валентной зоны в щелочно-галоидных кристаллах меньше ширины запрещенной зоны, а эффективная масса дырок существенно больше эффективной массы электронов. По этим двум причинам дырки не принимают участия в процессе ударной ионизации. Поэтому можно считать, что электрический пробой щелочно-галоидных кристаллов обусловлен ударной ионизацией быстрыми электронами. Как показано в [3], зависимость вероятности ударной ионизации от энергии электрона может быть представлена в виде (высокочастотная диэлектрическая постоянна $\chi_\infty \approx 1$)

$$W_i(\varepsilon) = g_0 \cdot \tau_0^{-1}(\varepsilon_i) \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\varepsilon_i},$$

$$g_0 = \tau_0(\varepsilon_i) \cdot \frac{\varepsilon_i}{\hbar} \left(\frac{me^4}{\hbar^2 \varepsilon_i \chi_\infty} \right)^2, \tag{38}$$

где ε_i – ширина запрещенной зоны, $\tau_0(\varepsilon_i)$ – время свободного пробега электрона при $\varepsilon = \varepsilon_i$, $T_0 = 0$. Учитывая (38) и используя результаты работы [16], легко показать, что усредненная по функции распределения вероятность ударной ионизации электронами в щелочно-галоидных кристаллах определяется выражением

$$W_i(E) = \frac{(4/3)^{1/3} \cdot \Gamma(4/3)}{\sqrt{2} \cdot \pi^2 \hbar^3 \cdot I} \cdot \frac{g_0^{1/3} (m\varepsilon_i)^{3/2}}{\tau_0(\varepsilon_i) \cdot \ln^2(4\varepsilon_i/\hbar\omega_0)} \times$$

$$\times \left(\frac{E}{E_0} \right)^{4/3} \cdot \exp\{-\mathcal{D}(E)\}, \tag{39}$$

где

$$\mathcal{D}(E) = \frac{E_0}{E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 x_0 + (1 + \ln 4) \cdot \left(\ln x_0 + 1 - \frac{x_0}{x_i} \right) - \frac{x_0}{x_i} \cdot \ln x_i \right\},$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{el_0 \cdot \mathrm{th}\beta_0}, \; x_0 = \frac{3\hbar\omega_0}{el_0 E}, \; x_i = \frac{\varepsilon_i}{\hbar\omega_0}, \tag{40}$$

$$\tau_0^{-1}(\varepsilon_i) = \frac{e^2\omega_0}{\hbar} \left(\frac{m}{2\hbar\omega_0} \right)^{1/2} (\chi_\infty^{-1} - \chi_0^{-1}) \cdot \left(\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_i} \right)^{1/2} \ln \frac{4\varepsilon_i}{\hbar\omega_0},$$

$$l_0^{-1} = \frac{e^2 m}{2\hbar^2} (\chi_\infty^{-1} - \chi_0^{-1}),$$

I – нормировочная постоянная функции распределения электронов, χ_0 – статическая диэлектрическая постоянная. Вероятность рекомбинации электронов определяется выражением

$$W_r(E) = \frac{(m\hbar\omega_0)^{3/2}}{\pi\sqrt{2\pi} \cdot \hbar^3 \cdot I} \cdot \tau_r^{-1}, \tag{41}$$

где τ_r – рекомбинационное время жизни электронов в условиях термодинамического равновесия. На основании (39) и (41) критерий электрического пробоя щелочно-галоидных кристаллов может быть представлен в виде:

$$\frac{W_i(E_c)}{W_r(E_c)} = \frac{(4/3)^{1/3} \cdot \Gamma(4/3)}{\sqrt{\pi} \cdot \ln^2(4\varepsilon_i/\hbar\omega_0)} \cdot \frac{g_0^{1/3} \cdot \tau_r}{\tau_0(\varepsilon_i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\hbar\omega_0} \right)^{3/2} \times$$

$$\times \left(\frac{E_c}{E_0}\right)^{4/3} \cdot \exp\{-\mathcal{D}(E_c)\} = 1, \tag{42}$$

где E_c – критическое электрическое поле, при котором происходит электрический пробой кристалла. При проведении численных расчетов параметры χ_0, χ_∞, $\hbar\omega_0$, ε_i, τ_r, входящие в критерий (42), а также экспериментальные значения E_c были взяты из независимых источников [10 – 14, 17]. Эффективная масса электронов рассматривалась нами в качестве единственного подгоночного параметра. Мы подбирали такие значения эффективной массы электронов, которые приводили бы к совпадению теоретических значений E_c, определяемых формулой (42), с экспериментальными (см. 4-ый столбец в таблице 3). Для сравнения в 5-ом столбце таблицы 3 приведены значения эффективных масс электронов, полученные С. И. Пекаром [11] из условия совпадения теоретических значений положения максимумов F-полос поглощения в щелочно-галоидных кристаллах с экспериментальными. Из таблицы 3 следует, что значения эффективных масс электронов, полученные двумя различными способами, практически совпадают. Такое совпадение можно считать подтверждением справедливости критерия (42).

Подчеркнем, что показатель экспоненты $\mathcal{D}(E_c, T_0)$ в (42) (он не зависит ни от g_0, ни от τ_r, практически не зависит от ε_i) является достаточно большой величиной (для всех щелочно-галоидных кристаллов он равен примерно 17), а потому оказывает решающее влияние на величину критического поля E_c; изменение предэкспоненциального множителя в (42) на два порядка приводит к изменению $\mathcal{D}(E_c, T_0)$ (или E_c, или m) на 30%. Отсюда следует также, что температурная зависимость E_c может быть найдена из условия $\mathcal{D}(E_c, T_0) = \text{const}$. Вычисленная таким образом температурная зависимость E_c для KBr практически линейна в интервале $T_0 = 100 - 500\,K$, причем $E_c(500\,K)/E_c(100\,K) = 2.16$ (теория), $E_c(500\,K)/E_c(100\,K) = 2.06$ (эксперимент [18]). Таков же характер температурной зависимости E_c и для других щелочно-галоидных кристаллов.

Итак, на примере ряда многодолинных анизотропных полупроводников (Ge, Si, $GaAs$) и диэлектриков с ионной связью (щелочно-галоидные кристаллы) показано, что построенная нами кинетическая теория ударной ионизации в твердых телах хорошо согласуется с экспериментом [см. таблицы 1 и 3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч у е н к о в В. А. ФТП, **11**, N 6, 1055 (1977).

[2] Ч у е н к о в В. А. ФТТ, **9**, N 1, 48 (1967).

[3] К е л д ы ш Л. В. ЖЭТФ, **37**, N 3, 713 (1959).

[4] К е л д ы ш Л. В. ЖЭТФ, **48**, N 6, 1692 (1965).

[5] Ч у е н к о в В. А. ФТП, **4**, N 5, 860 (1970).

[6] Ч у е н к о в В. А. ФТП, **4**, N 9, 1667 (1970).

[7] Ш о т о в А. П. ЖТФ, **28**, N 3, 437 (1958).

[8] M i l l e r S. L. Phys. Rev., **105**, N 4, 1246 (1957).

[9] В о р о б ь е в Л. Е., Д а н и л о в С. Н., И в ч е н к о Е. Л., Л е в и н ш т е й н М. Е., Ф и р с о в Д. А., Ш а л ы г и н В. А. Кинетические и оптические явления в сильных электрических полях в полупроводниках и наноструктурах. Санкт-Петербург, Наука, 2000, с. 102–109.

[10] З е й т ц Ф. Современная теория твердого тела. М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949, с. 323, 469–473.

[11] П е к а р С. И. Исследования по электронной теории кристаллов. М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951, с. 56, 209–211.

[12] В о р о б ь е в А. А. ЖТФ, **10**, 1183 (1940).

[13] C a l l e n H. B. Phys. Rev., **76**, 1394 (1949).

[14] М о т т Н., Г е р н и Р. Электронные процессы в ионных кристаллах. Л., Изд-во "Молодая гвардия", 1950 г.

[15] L a n d o l t – B ö r n s t e i n. Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Band 17, Halbleiter, p. 43 – 77, 87 – 119, 218 – 248, 310 – 342, Springer – Verlag Berlin. Heidelberg. New York, 1982.

[16] Ч у е н к о в В. А. ФТТ, **9**, N 1, 48 (1967).

[17] Ч у е н к о в В. А. УФН, **LIV**, N 2, 185 (1954).

[18] H i p p e l A. and A l g e r R. S. Phys. Rev., **76**, 127 (1949).

Поступила в редакцию 16 июня 2003 г.