Краткие сообщения по физике № 10 1983

К ТЕОРИИ ПИРСОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

А. М. Игнатов, О. Н. Кузнецова

УДК 533.951

Исследованы порог и инкремент пирсовской неустойчивости нейтрализованного по заряду электронного пучка с произвольным распределением плотности по сечению волновода. Электронный пучок находится во внешнем магнитном поле с индукцией $B \to \infty$.

I. Пирсовская неустойчивость нейтрализованного по заряду электронного пучка была предсказана в /I/ и затем исследовалась в ряде работ. Недавно в статье /2/ были получены пороги неустойчивости для пучков с произвольным распределением плотности по сечению в волноводе длиной $l \to \infty$, который находился во внешнем магнитном поле с индукцией $B \to \infty$. В данной статье предложен метод определения не только порогов, но и инкрементов неустойчивости.

Рассмотрим условие возникновения неустойчивости Пирса в волноводе произвольного сечения при заданном распределении плотности пучка $n_0(\bar{r})$ и при $B \to \infty$. В таких условиях интересующие нас низкочастотные колебания будут чисто потенциальными. Малые возмущения потенциала Ф удовлетворяют уравнению

$$\Delta \Phi = - 4\pi e n. \qquad (I)$$

Рассмотрим линеаризованные уравнения гидродинамики для периодического решения с частотой ω

$$\left(- i\omega + u \frac{d}{dz}\right)n + n_0(\bar{r}) \frac{dv}{dz} = 0, \qquad (2)$$

$$\left(- i\omega + u \frac{d}{dz}\right)v = - \frac{e}{m\gamma^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Здесь n и v – малые возмущения плотности пучка и скорости электронов соответственно, u – скорость пучка, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Будем искать решение этих уравнений с граничными условиями

$$\Phi|_{z=0} = \Phi|_{z=1} = 0, \quad n|_{z=0} = v|_{z=0} = 0, \quad \Phi|_L = 0, \tag{3}$$

где L – контур ограничивающий сечение волновода. Введем оператор $\hat{M} = -i\omega + u(d/dz)$. С учетом граничных условий (I) можно определить обратный оператор $(\hat{M}^{-1})$. Тогда из (I), (2) получаем

$$\Delta\Phi = -\frac{\omega_p^2}{\gamma^3}\hat{M}^{-1}\frac{d}{dz}\hat{M}^{-1}\frac{d}{dz}\Phi. \tag{4}$$

Представим Φ в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\bar{r})\Psi_n(z). \tag{5}$$

Здесь $g_n(\bar{r})$ – ортонормированные собственные функции задачи

$$\Delta_\perp g_n + \frac{\omega_p^2(\bar{r})}{u^2\gamma^3} g_n = \lambda_n^2 g_n,$$
$$\int_S g_n g_{n'} dxdy = \delta_{nn'}; \quad g|_L = 0, \tag{6}$$

где S – площадь поперечного сечения. Подстановка (5), (6) в (4) дает

$$\Psi_n'' + \lambda_n^2\Psi_n = \sum_m Q_{nm}(1 - u^2\hat{M}^{-1}\frac{d}{dz}\hat{M}^{-1}\frac{d}{dz})\Psi_m, \tag{7}$$

$$Q_{nm} = \frac{1}{\gamma^3}\int_S \frac{\omega_p^2(\bar{r})}{u^2} g_n g_m dxdy.$$

Граничные условия (3) для Ψ_n запишутся в виде

$$\Psi_n(0) = \Psi_n(1) = 0; \quad \Psi_n''(0) = 0, \tag{8}$$

$$\psi'''_n(0) + \lambda_n^2 \psi'_n(0) = 0. \tag{8a}$$

Дополнительное условие (8a) получается из уравнения (7) путем однократного дифференцирования.

Интегро-дифференциальное уравнение (7) можно легко свести к дифференциальному

$$\hat{M}^2(\Psi''_n + \lambda_n^2 \Psi_n) = \sum_m \Omega_{nm}(\hat{M}^2 - u^2 \frac{d^2}{dz^2})\Psi_m. \tag{9}$$

Решения $\Psi_n(z)$ будем искать в виде

$$\Psi_n(z) = \psi_n e^{iqz}, \tag{I0}$$

где $\psi_n = \text{const}$, а q не зависит от n. При подстановке (I0) в (9) получим

$$(\omega - qu)^2(\lambda_n^2 - q^2)\psi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_{nm}\omega(\omega - 2qu)\psi_m. \tag{II}$$

Соотношения (II) представляют собой бесконечную линейную систему с постоянными коэффициентами. Приравнивая нулю ее детерминант, можно получить характеристическое уравнение. Однако, так как порог и инкремент неустойчивости ищутся при малых $|\omega|$, можно не считать детерминант системы, а воспользоваться теорией возмущений, разлагая (II) по малому параметру $\omega\chi^{3/2}/\omega_p$. В нулевом приближении теории возмущений $\psi_n = \delta_{nn_o}$. Тогда для каждого фиксированного n получим четыре значения q.

$$q_{1,2} = \pm \lambda_{n_o} + \frac{\omega}{u}\Omega_{n_o n_o}/\lambda_{n_o}^2, \qquad q_{3,4} = \alpha\omega,$$

где α - некая величина, зависящая только от u, λ_{n_o} и $\Omega_{n_o n_o}$. Тогда

$$\Psi_n(z) = C_{1n}e^{iq_1 z} + C_{2n}e^{iq_2 z} + C_{3n}e^{iq_3 z} + C_{4n}e^{iq_4 z}. \tag{I2}$$

Подставляя (I2) в (8) и (8a) и вычисляя детерминант полученной системы с точностью до членов порядка ω^2, получим порог неустойчивости, равный $\lambda_{n_0} = \pi/l$, и инкремент вблизи порога

$$\omega = i\pi\delta u\lambda^2_{n_0}/4e\Omega_{n_0 n_0}, \text{ где } \lambda_{n_0} l = \pi + \delta, \ \delta \ll \pi.$$

Отметим, что эти результаты совпадают с данными работ /I/, /3/.

2. В качестве первого примера рассмотрим тонкий пучок, распространяющийся между двумя плоскостями, находящимися друг от друга на расстоянии a. Положим

$$\omega_p^2(\bar{r}) = \omega_p^2 \Delta \delta(x - b), \tag{I3}$$

где Δ - толщина пучка. Подставляя (I3) в (6), получим

$$\mathcal{E}|_{0<x<b} = C_1 \operatorname{sh}\lambda x,$$

$$\mathcal{E}|_{b<x<a} = C_1 \frac{\operatorname{sh}\lambda b}{\operatorname{sh}\lambda(b - a)} \operatorname{sh}\lambda(x - a),$$

причем λ определяется из уравнения

$$\Delta \frac{\omega_p^2}{u^2\gamma^3} = \lambda[\operatorname{cth}\lambda b + \operatorname{cth}\lambda(a - b)].$$

Будем искать решение при $l \to \infty$. Тогда минимальное значение $\lambda \to 0$. Порог неустойчивости определяется следующим соотношением:

$$\lambda^2 = 2\left[\frac{\varkappa^2}{a} - \frac{1}{b(a - b)}\right] = \frac{\pi^2}{l^2} \to 0$$

и инкремент

$$\omega = i\,\frac{\pi\delta}{4}\,\frac{u}{l}\,\frac{2}{3}\left[1 - \frac{a}{\varkappa^2 b(a - b)}\right] \sim \frac{u}{l^3},$$

где $\varkappa^2 = \omega_p^2\Delta/u^2\gamma^3$. Предельный ток $J_{пр}$ равен

$$J_{пр} = \frac{m}{4\pi e}\,\frac{a}{b(a - b)}\,u^3\gamma^3.$$

В качестве второго примера рассмотрим тонкий трубчатый пучок радиуса b в цилиндрическом волноводе с радиусом a. При такой геометрии пучка уравнение для λ имеет следующий вид:

$$\frac{\varkappa^2 I_0(\lambda b) - \lambda I_1(\lambda b)}{I_0(\lambda b)} = \lambda \frac{K_1(\lambda b) I_0(\lambda a) + I_1(\lambda b) K_0(\lambda a)}{K_0(\lambda b) I_0(\lambda a) - I_0(\lambda b) K_0(\lambda a)}.$$

Легко показать, что предельный ток и инкремент определяются соотношениями

$$J_{пр} = \frac{m}{2e} \frac{u^3}{\ln(a/b)} \gamma^3, \quad \omega = i \frac{\pi \delta}{4} \frac{u}{l}\, 2 \frac{\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2 b \ln(a/b)}\right)}{(\ln(a/b) + 1)^2} \sim \frac{u}{l^3}.$$

В рассмотренных примерах полученные значения $J_{пр}$ совпадают с соответствующими результатами в работе /2/.

Авторы благодарят А. А. Рухадзе за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
8 апреля 1983 г.

Литература

1. J. R. Pierce, Journ. Appl. Phys., 15, 721 (1944).
2. М. В. Кузелев, Г. В. Санадзе, А. Г. Шкварунец, Краткие сообщения по физике ФИАН № 11, 8 (1983).
3. А. А. Рухадзе, Л. С. Богданкевич и др., Физика сильноточных релятивистских электронных пучков, Атомиздат, М., 1980 г.