Краткие сообщения по физике № 12 1983

ОБОБЩЕННОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И S-МАТРИЦА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МЕМБРАН

Т. Е. Фрадкина

УДК 530.145

Проведено каноническое квантование и получена S-матрица для релятивистских мембран, представляющих собой обобщение теории струн на случай расширенной пространственной реализации. Показано, что теория мембран $(n+1)$-мерном пространстве является системой со связями ранга n.

На современном этапе развития единых моделей, опирающихся на такие калибровочные системы, как поля Янга – Миллса, гравитация и супергравитация, приобретают особый интерес теории струн и их пространственные обобщения, теории релятивистских мембран, в рамках которых удается эффективно описать взаимодействия элементарных частиц на больших расстояниях.

Такие геометрические объекты описываются следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = -\left[-g_{(n+1)}\right]^{1/2}; \quad g_{(n+1)}(x) = \mathrm{Det}\, g_{\mu\nu}(x), \qquad (I)$$
$$\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

При этом метрика $g_{\mu\nu}(x)$ имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = Y^A_{,\mu}(x) Y^A_{,\nu}(x), \qquad (2)$$
$$\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n; \quad A = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь через $Y^A(x)$ обозначено собственное поле мембраны, зависящее от временной координаты (x^0) и n пространственных координат $(^{(n)}\bar{x})$.

Заметим, что переходя к формализму, в котором метрика выступает независимой переменной по отношению к исходному полю мембраны, удается переписать лагранжиан теории в полиноминальном по производным от полей мембраны виде:

$$\mathcal{L} = -1/c\left[-g_{(n+1)}\right]^{1/2}\left[g^{\mu\nu} Y^A_{,\mu} Y^A_{,\nu} - (n-1)\right], \qquad (3)$$

где C – нормировочная константа, $A = 1, \ldots, m$; а $g_{\rho\nu} g^{\nu\mu} = \delta^\mu_\rho$, $\mu, \nu, \rho = 0, 1, \ldots, n$.

В этой формулировке теория мембран идентична индуцированной теории тензорных полей (гравитация в n-мерном пространстве). Суперсимметричное обобщение формулы (3) идентично n-мерной супергравитации.

Целью настоящей статьи явилось последовательное проведение квантования и получение S-матрица для релятивистских мембран. Квантование этих теорий стало возможным лишь в рамках обобщенного канонического формализма для релятивистских систем со связями произвольного ранга, разработанного в работах /I/. Дело в том, что релятивистские мембраны являются примером теорий со связями высшего ранга /2/, а применительно к таким теориям обычные методы канонического квантования систем со связями оказываются некорректными, поскольку приводят к неунитарной S-матрице.

В настоящей статье методом обобщенного канонического квантования получена унитарная, калибровочно-инвариантная S-матрица для релятивистских мембран.

Итак, следуя (I), получаем следующее выражение для канонических импульсов:

$$P^A(x) = -\left[-g_{(n+1)}\right]^{1/2} g^{\mu 0} Y^A_{,\mu}; \quad \mu = 0, 1, \ldots, n; \qquad A = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

При этом гамильтониан системы, получающийся стандартной процедурой, равен тождественно нулю, а связи имеют вид:

$$T_0 = 1/2(P_A P^A + g_{(n)}), \quad T_k = P_A Y^A_{,k}, \tag{5}$$

где $g_{(n)} = \mathrm{Det}\, g_{ik}(x)$, $i, k = 1, \ldots, n$, а $g_{ik}(x)$ заданы формулой (2).

Связи (5) представляют собой связи первого рода в инволюции:

$$\{T, T\} = T_\gamma U^\gamma, \quad \{T, H_0\} = 0, \tag{6}$$

где $T = T_\gamma C^\gamma$; $\gamma = 0, 1, \ldots, n$; C^γ – гостовские поля ферми-статистики.

Структурные коэффициенты калибровочной алгебры связей имеют вид:

$$U^k = g_{(n)} g^{kj} C^0 C^0_{,j} + C^j C^k_{,j}; \quad U^0 = C^0 C^k_{,k} - C^0_{,k} C^k; \qquad k, j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Связи (5) и структурные коэффициенты калибровочной алгебры (7) полностью определяют генератор БРСТ-преобразований Ω. Так, структурный коэффициент первого ранга генератора Ω имеет вид: $\Omega^\alpha = -U^\alpha/2$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$. Для структурного коэффициента второго ранга имеем согласно /I/ следующее соотношение:

$$2T_a \Omega^{ab} = -\{\Omega^b, T\} - \frac{\partial_r \Omega^b}{\partial C^a} T^a. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что в правой части соотношения (8) остается лишь член $-\{\Omega^b, T_0 C^0\}$, поскольку остальные члены взаимно сокращаются. В итоге получаем из (8) следующее выражение для коэффициента второго ранга:

$$\Omega^{k_1 k_2} = 1/2 \frac{\partial g_{(n)}}{\partial g_{k_1 j_1} \partial g_{k_2 j_2}} C^0 C^0_{,j_1} C^0_{,j_2} \delta(x_1, x_2), \tag{9}$$

где $k, j = 1, \ldots, n$. Аналогичным образом, используя соотношение для коэффициентов высшего ранга /I/,

$$(n+1) T_a \Omega_{sym}^{a a_1 \ldots a_n} = B_{sym}^{a_1 \ldots a_n}, \tag{I0}$$

где $B^{a_1 \ldots a_n}$ в данном конкретном случае определяется выражением

$$B^{a_1 \ldots a_n} = -\{\Omega^{a_1 \ldots a_n}, T_0 C^0\}, \tag{II}$$

получаем все остальные структурные коэффициенты генератора в виде:

$$\Omega^{k_1 \ldots k_m} = \left(\frac{2^{m-1}}{m!}\right) \frac{\partial g_{(n)}}{\partial g_{k_1 j_1} \ldots \partial g_{k_m j_m}} C^0 C^0_{,j_1} \ldots C^0_{,j_m} \times \tag{I2}$$

$$\times \delta(x_1, x_2) \delta(x_2, x_3) \ldots \delta(x_{m-1}, x_m),$$

для $2 < m \leq n$, а при $m > n$, $\Omega^{k_1 \ldots k_m} = 0$. Отсюда следует, что мембрана в n-мерном пространстве представляет собой систему со связями ранга n. К связям первого рода T_α удобно выбрать калибровочные релятивистские условия в виде:

$$\Phi^\alpha = -\beta \dot{\lambda}^\alpha + \chi^\alpha(\lambda, C), \tag{I3}$$

где λ^α – лагранжевы множители при связях первого рода в лагранжиане теории со связями.

Следуя /I/, имеем следующее выражение для обобщенного гамильтониана системы

$$H_{comp} = T_\alpha \lambda^\alpha + \pi_\alpha \Phi^\alpha - 1/2 \frac{\partial \Phi}{\partial C^0} (C^0 C^k_{,k} - C^0_{,k} C^k) -$$

$$- 1/2 \frac{\partial \Phi}{\partial C^k} (g_{(n)} g^{kj} C^0 C^0_{,j} + C^j C^k_{,j}) - \bar{\mathcal{P}}_0 (\dot{C}^0 + \lambda^k_{,k} C^0 - \lambda^k C^0_{,k}) -$$

$$- \bar{\mathcal{P}}_k (\dot{C}^k + \lambda^k_{,j} C^j + g_{(n)} g^{kj} \lambda^0_{,j} C^0) + \sum_{m=2}^{n} \bar{\mathcal{P}}_{k_m} \ldots \bar{\mathcal{P}}_{k_1} \times \tag{I4}$$

$$\times \left(\frac{\partial \Omega^{k_1 \ldots k_m}}{\partial C^0} \lambda^0 - (m+1) \Omega^{k_1 \ldots k_m k} \frac{\partial \Phi}{\partial C^k} \right),$$

где

$$\bar{\mathcal{P}}_\alpha = - \int dt' \frac{\delta^r \Phi(t')}{\delta \lambda^\alpha (t)}; \; \Phi = \bar{C}_\alpha \Phi^\alpha; \tag{I5}$$

π_α — лагранжев множитель к калибровке Φ^α; $\bar{C}_\alpha$ — антигостовские поля: $\left[C^\alpha, \bar{C}_\beta \right]_+ = \delta^\alpha_\beta$. Производящий функционал в фазовом пространстве для квантовых релятивистских мембран имеет вид:

$$\mathcal{Z}(J) = \int DP_A DY^A D\lambda^\alpha D\pi_\alpha D\bar{C}_\beta D\dot{C}^\beta \exp\left\{ i \int d^{(n+1)} x (P_A Y^A_{,0} - H_{comp} + J_A Y^A) \right\}. \tag{I6}$$

Отсюда, проведя интегрирование по каноническим импульсам, получаем следующий лагранжев ответ для теории:

$$\mathcal{Z}(J) = \int DY^A D\lambda^\alpha D\pi_\alpha D\bar{C}_\beta DC^\beta \mu_1 \exp\left\{ i \int d^{(n+1)} x \left[\mathcal{L}_*(\lambda^\alpha) + \pi_\alpha \Phi^\alpha + \right.\right. \tag{I7}$$

$$\left.\left. + \mathcal{L}_C(\lambda^\alpha) + J_A Y^A \right] \right\},$$

где

$$\mathcal{L}_*(\lambda^\alpha) = - \frac{\lambda^0}{2} g_{(n)} + \frac{g_{00} + 2\lambda^k g_{k0} + \lambda^k \lambda^m g_{km}}{2\lambda^0},$$

$$\mathcal{L}_C(\lambda^\alpha) = + 1/2 \frac{\partial \Phi}{\partial C^0} (C^0 C^k_{,k} - C^0_{,k} C^k) + 1/2 \frac{\partial \Phi}{\partial C^k} (g_{(n)} g^{kj} C^0 C^0_{,j} +$$

$$+ C^j C^k{}_{,j}) + \bar{\mathcal{P}}_0(\dot{C}^0 + \lambda^k{}_{,k}C^0 - \lambda^k C^0{}_{,k}) + \bar{\mathcal{P}}_k(\dot{C}^k + \lambda^k{}_{,j}C^j +$$

$$+ g_{(n)}g^{kj}\lambda^0{}_{,j}C^0) - \sum_{m=2}^{n}\bar{\mathcal{P}}_{k_m}\ldots\bar{\mathcal{P}}_{k_1}\left(\frac{\partial\Omega^{k_1\ldots k_m}}{\partial C^0}\lambda^0 - \right. \tag{18}$$

$$\left. - (m+1)\Omega^{k_1\ldots k_m k}\frac{\partial\Phi}{\partial C^k}\right);$$

$$\mu_1 = (\pi)^{1/2}(\lambda^0/2)^{-m/2}. \tag{19}$$

Полученное выражение для производящего функционала приобретает более наглядный вид после проведения интегрирования по λ^α методом стационарной фазы. Уравнения экстремалей для λ^α имеют вид:

$$\bar{\lambda}_0^2 g_{(n)} = -g_{00} + \bar{\lambda}_k g_{k0}, \quad g_{0p} = +\bar{\lambda}_k g_{kp}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\lambda}_0^2 = -\frac{1}{g_{(n)}g^{00}} = -\frac{1}{g(g^{00})^2}, \quad \bar{\lambda}_k = -g^{0k}/g^{00}. \tag{21}$$

Подставляя полученные значения экстремалей $\lambda^\alpha = \bar{\lambda}_\alpha$ в (17) и вычисляя детерминант по квадратичным отклонениям от экстремальных значений, получим следующее выражение для производящего функционала:

$$Z(J) = \int DY^A DC^\alpha D\bar{C}_\alpha \delta(\Phi(\bar{\lambda}_\alpha))\mu \exp i\int d^{(n+1)}x\left[-(-g_{(n+1)})^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L}_C(\bar{\lambda}_\alpha) + J_A Y^A\right], \tag{22}$$

где

$$\mu = \pi^{1/2}(\bar{\lambda}_0)^{n-m/2+1/2}(2)^{m/2}/g_{(n)}. \tag{23}$$

Не представляет труда получить выражение для S-матрицы и в случае общей калибровки, зависящей от всех переменных обобщенного фазового пространства, а также в индуцированном варианте теории мембран.

Поступила в редакцию
14 июня 1983 г.

Литература

1. E. S. Fradkin, T. E. Fradkina, Phys. Lett., 72B, 343 (1978).
   Т. Е. Фрадкина, Препринт ФИАН № 5, М., 1979 г.
2. M. Henneaux, Prepr. CSSM, Austin, Texas, U.S.A.