

СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ГЕНЕРАЦИИ МАЗЕРОВ

К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас

УДК 621.375.823

Рассматриваются неперiodические, стохастические решения уравнений динамики ядерного зеемановского лазера, работающего на неоднородно уширенной линии. Исследуются геометрия и статистические свойства таких решений, их связь с предельными циклами.

В работах /1,2/ показано, что неоднородное уширение линии, сравнимое с релаксационной шириной, нарушает устойчивость генерации лазера, вызывает появление самомодуляции. Режимам периодической самомодуляции соответствуют спектры радиочастотного поля в резонаторе лазера, состоящие из нескольких дискретных линий. При определенных условиях такой спектр может с хорошей точностью отображать набор резонансных частот рабочего вещества /2/. В настоящей работе рассматривается наиболее сложный вид самомодуляции - стохастические режимы. Поле в резонаторе в этом случае имеет непрерывный спектр. Математические проблемы, возникающие при изучении стохастических режимов, близки к рассмотренным в работах, посвященных аттракторам Лоренца /3/.

Как и в работе /2/, рассматривается простейшая модель неоднородного уширения - симметричная раздвоенная линия. Уравнения, описывающие динамику лазера, имеют для этого случая вид:

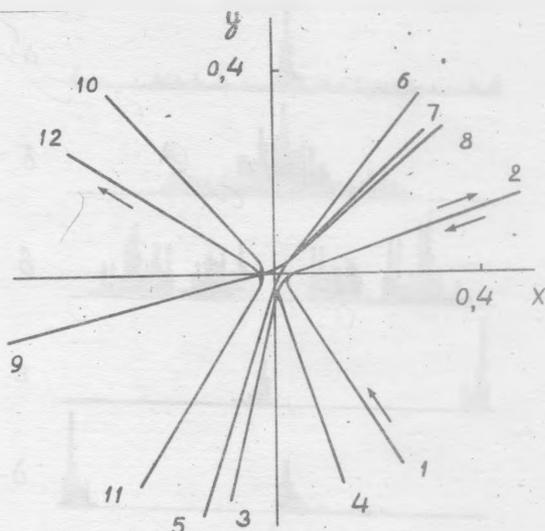
$$\begin{aligned} dx/dt + x - \delta y' - kxz &= 0, \\ dx'/dt + x' - \delta y - kxz' &= 0, \\ dy/dt + y + \delta x' - kyz &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dy'/dt + y' + \delta x - kyz' &= 0, \\
 dz/dt + z + k(x^2 + y^2) &= 1, \\
 dz'/dt + z' + k(xx' + yy') &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

Здесь  $x, y, z$  - средние значения безразмерных компонент вектора ядерной намагниченности,  $x', y', z'$  - полуразности, пропорциональные моментам первого порядка,  $\delta$  - полуширина раздвоенной линии,  $k$  - безразмерный коэффициент усиления. Уравнения записаны во вращающейся системе координат, выбранной таким образом, что монохроматической генерации соответствуют положения равновесия. Выбор единиц определяется соотношениями:  $T_I = T_2 = 1, M_0 = 1/4$ .

Качественные типы решений системы (I) сложным образом зависят от значений параметров  $k, \delta^2$ . Наиболее интересные для приложений режимы монохроматической генерации устойчивы "в малом" при  $\delta^2 < 1$ , но и в этой области возможно жесткое возникновение немонохроматических колебаний. Области устойчивости предельных циклов, рассмотренных в работе /2/, представляют в плоскости параметров  $k, \delta^2$  частично перекрывающиеся друг с другом "острова". Вообще же, для  $k$  достаточно далеких от порога самовозбуждения и  $\delta^2 > 1$  стохастические колебания представляют наиболее характерную форму решений.

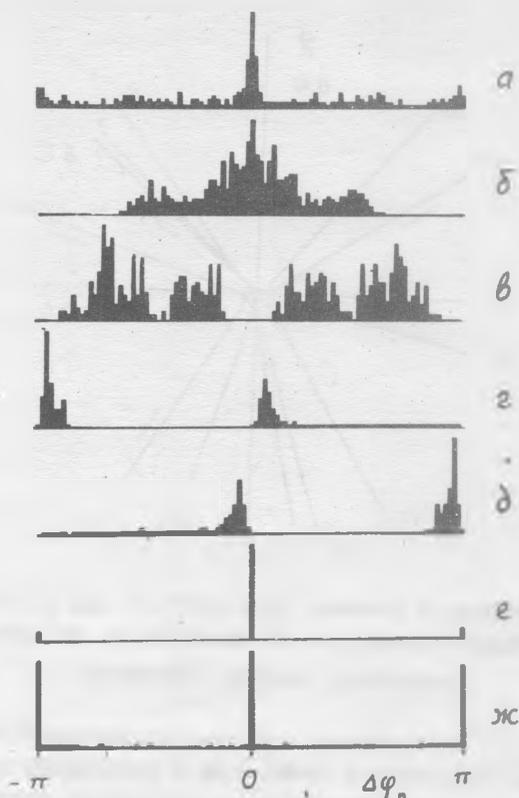
Система уравнений (I) исследовалась численно. В области стохастических решений здесь возникают трудные проблемы диагностики - необходимо отличить стохастический режим от сложного предельного цикла, выяснить его поведение во времени (является ли он устойчивым или метастабильным), исследовать процессы, определяющие стохастичность решения. Попытки использовать преобразование Фурье показали, что установить этим путем какие-либо тонкие различия в поведении решений трудно. Значительно более эффективным оказался подход, использующий осциллирующую зависимость всех переменных от времени и характерную геометрию решений (рис. I). Из всего объема информации регистрировались изменения  $\Delta\varphi_n$  фазы колебаний (величины  $\arctg(y/x)$ ) за время, прошедшее между двумя последовательными максимумами величины  $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Использовались также гистограммы, позволяющие определить вероятность появления заданного значения



Р и с. 1. Численное решение уравнений (I) для  $k = 20$ ,  $\delta^2 = 1,3$ . Проекция участка траектории на плоскость  $x, y$ ; цифрами 1 - 12 обозначены номера максимумов

$\Delta\varphi_n$  (рис. 2) и корреляцию двух последовательных значений. Для контроля проводились вычисления с различными заданными уровнями точности и с искусственно введенными псевдослучайными возмущениями.

Численное исследование показало, что стохастические решения уравнений (I) характеризуются разнообразием заполнения фазового пространства (ср. рис. 2) и сложным поведением во времени. Тем не менее можно выделить два основные типа решений, непосредственно сопоставимые со свойствами симметрии уравнений. В работе [2] отмечалось существование решений системы (I), которые можно определить с точностью до фазы, полагая  $x' = y = z' = 0$ . В соответствии с этим в настоящей работе обнаружены стохастические решения уравнений (I), охватывающие все шесть переменных (тип  $A_6$ ) и трехмерные решения (тип  $A_3$ ). Пример решения первого типа дают рис. 1, 2а. Решения типа  $A_3$  выделяются хаотическим чередованием значений  $\Delta\varphi_n = 0, \pm\pi$  (рис. 2е) и



Р и с. 2. Вероятность появления заданного значения  $\Delta\varphi_n$  в относительных единицах: а)  $k = 20, \delta^2 = 1,3$ ; б)  $k = 50, \delta^2 = 1,2$ ; в)  $k = 25, \delta^2 = 1,5$ ; г, д)  $k = 14, \delta^2 = 1,55$ ; е)  $k = 25, \delta^2 = 1$ ; ж)  $k = 20, \delta^2 = 2$

значениями  $z' = 0$ ; траектория решения в проекции на плоскость  $x, y$  имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Реализация того или другого типа решений - это вопрос устойчивости или неустойчивости движений, которые можно выделить простым признаком  $z' = 0$ .

Отраженным в гистограммах рис. 2 резким различиям в геометрии решений типа  $A_6$  соответствуют не менее значительные

различия в поведении во времени. Гистограммам рис. 2а,б соответствуют решения, хаотичность которых очевидна: в последовательностях значений  $\Delta\varphi_d$  не встречается повторяющихся комбинаций. Гистограмма рис. 2в соответствует движению, напоминающему предельный цикл, охватывающий более 100 максимумов величины  $A$ .

Решения типа  $A_6$  можно разделить на два качественно различных подвида. Гистограммы рис. 2а-в дают примеры решений симметричных в смысле равновероятного возникновения положительных и отрицательных значений  $\Delta\varphi_d$ . Небольшая асимметрия объясняется конечным объемом реализаций. На рис. 2г дана гистограмма резко асимметричного в указанном смысле решения. Исходя из свойств симметрии уравнений можно предсказать существование решений, отличающихся знаком асимметрии: система (I) допускает замену переменных, соответствующую изменению знака  $d\varphi/dt$ . Изменяя начальные условия, такие решения действительно можно получить (рис. 2д). Обнаруженные до настоящего времени решения этого типа метастабильны - наблюдались чрезвычайно редкие самопроизвольные изменения знака асимметрии. Существование асимметричных решений - наглядное свидетельство того, что притягивающие множества, соответствующие стохастическим решениям уравнений (I), далеко не исчерпывают фазовое пространство уравнений.

Решения типа  $A_3$  также обнаруживают сложное поведение во времени. Эти решения могут быть устойчивыми (рис. 2е), но могут быть и метастабильными (рис. 2ж). Длительные периоды "трехмерной" генерации чередуются в последнем случае с самопроизвольными переходами в "шестимерный" режим, с последующим уменьшением значений переменной  $z'$  и восстановлением трехмерных стохастических осцилляций, но с измененной фазой (измененным значением отношения  $y/x$ ). Исследование метастабильных решений типа  $A_3$  показало относительную независимость процессов, охватывающих малые для решений этого типа переменные: осцилляции переменной  $z'$  не повторяют осцилляций основных переменных, переходу генерации в шестимерный режим предшествует экспоненциальное нарастание  $z'$ .

В связи с исследованиями решений типа  $A_3$  был обследован также соответствующий предельный случай - уравнения

$$\begin{aligned} dx/dt + x - \delta y' - kxz &= 0, \\ dy'/dt + y' + \delta x &= 0, \\ dz/dt + z + kx^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Стохастические решения уравнений (2) близки к решениям полной системы уравнений, но, естественно, не обнаруживают метастабильности указанного типа.

Для уравнений (2) было проведено более детальное изучение геометрии решений. Структура аттракторов Лоренца [3] позволяет использовать одномерные отображения для исследования поведения решений во времени. Притягивающие множества уравнений (2) имеют более сложную структуру, соответствующие одномерные отображения неоднозначны. Эти различия можно связать с аналитическими свойствами уравнений. Дивергенция векторного поля уравнений Лоренца имеет независимые от входящих в уравнения переменных большие отрицательные значения. Для уравнений (1) и (2) эта же величина зависит от переменной  $z$ . Вычисления, проведенные для конкретных стохастических решений, показывают, что фазовый объем уменьшается медленно и немонотонно.

Поступила в редакцию  
10 июля 1981 г.

#### Л и т е р а т у р а

1. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике ФИАН № 10, 41 (1971); № 3, 47 (1972); № 5, 19 (1973); К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, там же, № 7, 16 (1977); № 10, 37 (1977).
2. К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН № 12, 3 (1980).
3. E. N. Lorenz, Journ. Atmosph. Sci., 20, 130 (1963), имеется русский перевод в сб. Странные аттракторы, "Мир", М., 1981 г., с. 88.
4. F. Bloch, Phys. Rev., 70, 460 (1946).