Краткие сообщения по физике № 1 1982

ОБ ОКОНЧАНИИ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОННЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

В. П. Силин, В. Н. Урсов

УДК 533.951.2

Для ультрарелятивистской плазмы как с трехмерным, так и с одномерным больцмановским распределением приведено доказательство того, что наибольший декремент затухания электронных ленгмюровских волн не превышает $\omega(mc^2/\varkappa T)^2$, а минимальная фазовая скорость ее удовлетворяет условию $c - v_{min} \lesssim c(mc^2/\varkappa T)^2$.

Свыше 20 лет тому назад одним из авторов /1/ было указано, что в ультрарелятивистской плазме минимальная фазовая скорость v_{min} электронных продольных волн отличается от скорости света c на величину $\sim c\alpha^2$, где $\alpha = mc^2/\varkappa T \ll 1$. При этом декремент затухания γ продольных волн с такой досветовой фазовой скоростью согласно /1/ оказывается $\sim \omega\alpha^2$. За прошедшие годы интерес к ультрарелятивистской плазме возрос. В то же время в литературе высказываются путаные утверждения об окрестности окончания спектра продольных электронных ленгмюровских волн в ультрарелятивистской плазме. Так, например, в работах /2,3/ утверждается, что указанных выше результатов в работе /1/ будто бы вовсе нет. Помимо этого в работе /3/, в отличие от результатов работы /1/, утверждается, что продольные волны достаточно малой длины сильно затухают. Утверждение о сильном затухании продольных волн в ультрарелятивистской больцмановской плазме до работы /3/ делалось в работе /4/, где оно возникло из-за неточного решения дисперсионного уравнения. С другой стороны, численное решение дисперсионного уравнения продольных волн, проведенное в работе /5/ для одномерного больцмановского распределения, а в работе /6/ для трехмерного случая, фактически подтвердило результат работы /I/, о котором авторы работ /5/ и /6/ не знали и, возможно, поэтому соответствующих выводов не сделали. Заметим, что факт окончания дисперсионной кривой продольных волн без наличия сильного затухания был недавно обнаружен для релятивистской плазмы со степенным законом распределения частиц по энергиям /7/. Имея в виду такую противоречивость опубликованных утверждений, ниже мы для оказавшегося для исследователей наиболее трудным практически важного случая ультрарелятивистской электронной плазмы с больцмановским распределением по скоростям приведем доказательство того, что γ/ω и $(c - v_{min})/c$ по порядку величины не превышают $\alpha^2 = (mc^2/æT)^2$.

В основу нашего рассмотрения положим следующее выражение продольной диэлектрической постоянной /8/ электронной плазмы с трехмерным больцмановским распределением:

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + \left[a^2k^2\alpha^2K_2(\alpha)\right]^{-1}(kc/\omega)\int_{-1}^{1} dy y^2\left[y - (\omega/kc)\right]^{-1} \times \tag{I}$$

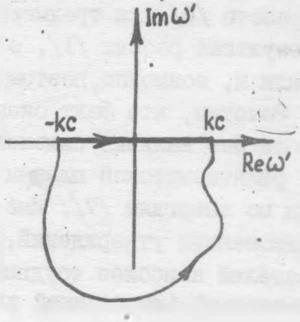
$$\times \exp\left[-\alpha(1 - y^2)^{-1/2}\right]\left[1 + \alpha(1 - y^2)^{-1/2} + (\alpha^2/2)(1 - y^2)^{-1}\right],$$

где $a^2 = æT/4\pi e^2N$, $K_n(\alpha)$ - функция Макдональда. Поскольку при действительном k и комплексном ω мнимая часть $\omega\varepsilon(\omega,k)$ согласно (I), равна

$$(\mathrm{Im}\omega)\left[1 + (a^2k^2\alpha^2K_2(\alpha))^{-1}\int_{-1}^{1} dy \times\right.$$

$$\left.\times\frac{y^2\exp\left[-\alpha(1 - y^2)^{-1/2}\right](1 + \alpha(1 - y^2)^{-1/2} + \alpha^2(1 - y^2)^{-1}/2)}{(y - (\mathrm{Re}\omega/kc))^2 + (\mathrm{Im}\omega/kc)^2}\right],$$

то благодаря положительности выражения в квадратных скобках можно утверждать, что при $\mathrm{Im}\omega \neq 0$ диэлектрическая постоянная (I) не обращается в ноль, а поэтому она не описывает каких-либо затухающих плазменных колебаний (ср. с /7/).



Р и с. I. Контур C_1 в комплексной плоскости $\omega' = ykc$

Функция $\varepsilon(\omega,k)$ в комплексной плоскости ω имеет точки ветвления $\pm kc$, между которыми вдоль действительной оси проведён разрез /8/. Для описания затухающих колебаний необходимо использовать аналитическое продолжение функции (I) в нижнюю полуплоскость комплексного переменного ω (ср. с/9/), которое можно получить деформацией контура интегрирования (см. рис. I., на котором изображен соответствующий контур C_1). Используя для такого аналитического продолжения обозначение $\varepsilon_1(\omega,k)$, можно утверждать, что

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) \equiv \varepsilon_1(\omega,k) - \varepsilon(\omega,k) = i2\pi\left[a^2k^2\alpha^2K_2(\alpha)\right]^{-1}(\omega/kc)\times$$
$$\times\exp\left[-\alpha(1-(\omega/kc)^2)^{-1/2}\right]\left[1+\alpha(1-(\omega/kc)^2)^{-1/2}+(\alpha^2/2)\times\right.$$
$$\left.\times(1-(\omega/kc)^2)^{-1}\right] \qquad (2)$$

отлично от нуля только в области комплексной плоскости ω, ограниченной контуром C_1 и отрезком действительной оси $-kc \leqslant \omega \leqslant kc$.

Покажем, что в пределе

$$|1-(\omega/kc)^2| \gg \alpha^2 \qquad (3)$$

уравнение $\varepsilon_1(\omega,k) = 0$ не имеет решений с $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$. Это отвечает отсутствию затухающих продольных волн в условиях вне указанных ограничений работы /I/. В пределе (3) формула (2) принимает вид (при учете $\alpha^2K_2(\alpha) \approx 2$):

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) = (i\pi/a^2k^2)(\omega/kc), \tag{4}$$

а старший член асимптотического разложения (I) имеет вид:

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + \frac{1}{a^2k^2}\left[1 + \left(\frac{\omega}{2kc}\right)\ln\frac{\omega - kc}{\omega + kc}\right]. \tag{5}$$

Это выражение отвечает полученному в /I,8/, а после устранения опечатки и приведенному в /I0/. Формула (5) отвечает разрезу в плоскости комплексного переменного ω от $-kc$ до kc. Последнее означает, что аргумент $(\arg u)$ подлогарифмического выражения

$$(\omega - kc)/(\omega + kc) \equiv u = |u|\exp(\arg u) \tag{6}$$

меняется в пределах от $-\pi$ до π, поскольку разрез в плоскости ω отвечает разрезу в плоскости комплексного переменного u от $-\infty$ до 0 вдоль действительной оси.

Формулы (4), (5), (6) позволяют показать, что уравнение $\varepsilon_1(\omega,k) = 0$ не имеет затухающих $(\mathrm{Im}\,\omega<0)$ решений в условиях (3). Для этого достаточно показать, что $\mathrm{Im}(\varepsilon_1(\omega,k)/\omega) \neq 0$. Согласно (4) и (5) имеем

$$\mathrm{Im}(\varepsilon_1(\omega,k)/\omega) = \\ = (1 + 1/a^2k^2)(-\mathrm{Im}\,\omega)/|\omega|^2 + (\pi/a^2ck^3)[1 + (\arg u/2\pi)]. \tag{7}$$

Благодаря тому, что $|\arg u| \leqslant \pi$, очевидно, что при $\mathrm{Im}\,\omega<0$ выражение (7) не может обращаться в ноль. Тем самым доказано отсутствие затухающих продольных волн в ультрарелятивистской плазме в условиях (3). Поэтому если и могут быть в ультрарелятивистской больцмановской плазме затухающие продольные волны, то они оказываются слабозатухающими и удовлетворяющими условиям

$$|c - v_{min}| \lesssim (1/2)c\alpha^2; \quad \gamma = |\mathrm{Im}\,\omega| \lesssim \alpha^2|\mathrm{Re}\,\omega|. \tag{8}$$

Отметим, что в условиях $c - \mathrm{Re}\,\omega/k \ll \alpha^2 c$ декремент затухания исследовался в работах /II,3/.

Наше рассмотрение легко может быть перенесено на интересный для астрофизических приложений /2/ случай одномерного больцмановского распределения по скоростям, когда продольная диэлектрическая постоянная имеет вид (ср. с /5/):

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + \left[a^2k^2 2K_1(\alpha)\right]^{-1}(kc/\omega)\int_{-1}^{1} dy y^2(1 - y^2)^{-3/2} \times$$
$$\times (y - \omega/kc)^{-1} \exp\left[-\alpha(1 - y^2)^{-1/2}\right]. \tag{9}$$

Прежде всего, следуя работе /7/, замечаем, что поскольку согласно (9)

$$\mathrm{Im}(\omega\varepsilon(\omega,k)) = (\mathrm{Im}\omega)\left[1 + (a^2k^2 2K_1(\alpha))^{-1}\int_{-1}^{1} dy \frac{y^2}{(1 - y^2)^{3/2}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\exp\left[-\alpha(1 - y^2)^{-1/2}\right]}{(y - (\mathrm{Re}\omega/kc))^2 + (\mathrm{Im}\omega/kc)^2}\right], \tag{10}$$

то благодаря положительности выражения в квадратных скобках можно утверждать, что при $\mathrm{Im}\omega \neq 0$ функция $\omega\varepsilon(\omega,k) \neq 0$, и поэтому в нижней полуплоскости ω снаружи от контура C_1 (рис. I) нет решений дисперсионного уравнения, отвечающих затухающим волнам.

Далее, внутри контура C_1 при $\mathrm{Im}\omega < 0$ имеем

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) \equiv \varepsilon_1(\omega,k) - \varepsilon(\omega,k) = \frac{i\pi(\omega/kc)\exp\left[-\alpha(1 - (\omega/kc)^2)^{-1/2}\right]}{a^2k^2K_1(\alpha)(1 - (\omega/kc)^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Для того, чтобы убедиться в отсутствии затухающих решений уравнения $\varepsilon_1(\omega,k) = 0$ в условиях (3) запишем соответствующие асимптотические выражения. Очевидно, что в пределе (3) формула (II) принимает вид (при учете $\alpha K_1(\alpha) \cong 1$)

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) = (i\pi\alpha/a^2k^2)(\omega/kc)(1 - (\omega/kc)^2)^{-5/2}. \tag{12}$$

Для получения асимптотического выражения $\varepsilon(\omega,k)$ проведем в (9) интегрирование по частям, что дает:

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 - \left[a^2k^2 2\alpha K_1(\alpha)\right]^{-1} \int_{-1}^{1} dy(y - (\omega/kc))^{-2} \times$$
$$\times \exp\left[-\alpha(1-y^2)^{-1/2}\right].$$

Отсюда уже очевидно, что старший член асимптотического разложения имеет вид

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 - \frac{c^2}{a^2}\frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}. \qquad (13)$$

Сравнение выражений (I2) и (I3) показывает, что, ограничиваясь старшими членами разложения, можно опустить $\Delta\varepsilon(\omega,k)$, а тем самым для доказательства отсутствия затухающих продольных волн в условиях (3) воспользоваться отличием от нуля выражения (I0). Помимо этого согласно (I3) можно утверждать, что в области (3)

$$\omega^2 = c^2k^2 + \omega_0^2,$$

где $\omega_0^2 = 4\pi e^2Nc^2/\varkappa T$. Это выражение отвечает волнам с фазовой скоростью большей скорости света, для которых затухание невозможно. Поэтому и для электронной плазмы с одномерным больцмановским распределением окончание спектра электронных ленгмюровских колебаний со стороны коротких волн удовлетворяет условиям (8), и, также как и в случае трехмерного больцмановского распределения, не отвечает возникновению сильного затухания. Это свойство ультрарелятивистской плазмы является универсальным, качественно отличающим свойства продольных волн от свойств волн в нерелятивистской максвелловской плазме /9/. Физическая сущность такого отличия была установлена в работе /I/ и связана с тем, что в ультрарелятивистской плазме мало число электронов со скоростями, заметно отличающимися от скорости света.

Поступила в редакцию
20 июля 1981 г.

Литература

I. В. П. Силин, ЖЭТФ, 38, I577 (I960).
2. Д. Г. Ломинадзе, А. Б. Михайловский, ЖЭТФ, 76, 959 (I979).
3. A. B. Mikhailovskii, Plasma Physics, 22, 133 (1980).
4. B. Buti, Phys. Fluids, 5, 1 (1962).
5. B. B. Godfrey, B. S. Newberger, K. A. Taggart, IEEE Trans. Plasma Sci., PS-3, 60 (1975).
6. B. B. Godfrey, B. S. Newberger, K. A. Taggart, IEEE Trans. Plasma Sci., PS-3, 68 (1975).
7. Е. В. Суворов, Ю. В. Чугунов, Физика плазмы, 6, I22 (I980).
8. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., I96I г.
9. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, I6, 574 (I946).
I0. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая кинетика, "Наука", М., I979 г., с. I66.
II. В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 40, I775 (I96I).