

4. Д. Ф. Алферов, Е. Г. Бессонов, Труды X Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Протвино, 1977 г.; Письма в ЖТФ, 31, 828 (1977).
5. R. Coisson, Nucl. Instr. Meth., 143, 241 (1977); Труды УП Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1981 г., т. П, с. 147, Труды Всесоюзного совещания по использованию синхротронного излучения, Новосибирск, 1982 г.

*Краткие сообщения по физике № 11 1983*

#### О ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ПИРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

М. В. Кузелев, Г. В. Санадзе, А. Г. Шкварунец

УДК 531.9

Решена прикладная задача об определении предельных токов скомпенсированных электронных пучков сложной геометрии. Предельные токи рассчитаны для произвольных тонких пучков и для трубчатого пучка конечной толщины в цилиндрической трубе.

Различают два условия пирсовской неустойчивости электронного пучка в дрейфовом промежутке — необходимое и достаточное. Необходимое условие есть граница по току, выше которой в пучке возникают стационарные, то есть с нулевой фазовой скоростью, волны. Необходимое условие зависит только от поперечной геометрии. Достаточное условие определяется и длиной дрейфового промежутка. Если длина дрейфовой камеры существенно больше ее поперечных размеров, то достаточное условие практически не отличается от необходимого и имеет смысл говорить только о последнем /1/. Именно так и делается в настоящей работе.

Рассмотрим произвольный волновод, считая, что его собственные функции  $\varphi_n(\bar{r}_1)$  и собственные значения  $k_{1n}^2$  известны. Равновесную плотность электронного пучка определим следующим образом:  $n_0(\bar{r}_1) = n_b p(\bar{r}_1)$ . Здесь  $\bar{r}_1$  - координата в поперечном сечении,  $n_b = \text{const}$ , а  $p(\bar{r}) \geq 0$  - профиль плотности. Представим возмущение плотности электронов в виде  $n_b p(\bar{r}_1) \rho e^{-i\omega t + i k_z z}$ . Легко показать, что функция  $\rho(\bar{r}_1)$  определяется из следующего однородного интегрального уравнения

$$(\omega - k_z u)^2 \rho = \omega_b^2 \gamma^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_z^2}{k_{1n}^2 + k_z^2} \frac{\varphi_n^2(\bar{r}_1)}{\|\varphi_n\|^2} \int_{S_w} p_b \varphi_n \rho d\bar{r}_1. \quad (I)$$

Здесь  $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b / m$ ,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $u$  - скорость пучка,  $\|\varphi_n\|$  - норма собственной функции, а  $S_w$  - площадь сечения волновода. Задача (I) эквивалентна линейному дисперсионному уравнению. Для получения условия Пирса необходимо в (I) совершить предельные переходы:  $\omega/k_z \rightarrow 0$  и  $k_z \rightarrow 0$ . В результате получим следующее уравнение

$$\rho(\bar{r}_1) = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{11}^2 u^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{11}^2}{k_{1n}^2} \frac{\varphi_n^2(\bar{r}_1)}{\|\varphi_n\|^2} \int_{S_w} p_b \varphi_n \rho d\bar{r}_1. \quad (2)$$

Минимальное собственное значение задачи (2)

$$\omega_b^2 \gamma^{-3} / k_{11}^2 u^2 = \alpha \quad (3)$$

и есть необходимое условие Пирса. Легко видеть, что для пучка с однородным профилем  $\alpha = 1$ .

Рассмотрим тонкий пучок:  $p_b = S_b \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_b)$ ,  $S_b$  - площадь сечения пучка,  $\bar{r}_b$  - его средняя координата. В этом случае условие (3) записывается в явном виде

$$\omega_b^2 \gamma^{-3} / k_{11}^2 u^2 = (S_w / S_b) G, \quad (4)$$

где

$$G = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{11}^2}{k_{1n}^2} \frac{S_w \varphi_n^2}{\|\varphi_n\|^2} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Форм-фактор  $G$  определяет те отличия, которые возникают в условии Пирса из-за неоднородности профиля пучка.

Запишем (4) в виде условия на ток

$$J_p = J_{Op} G, \quad (6)$$

где  $J_{Op} = (1/4\pi)(mc^3/l)(u^3/c^3)\gamma^3 k_{\perp 1}^2 S_w$  — предельный ток Пирса для однородного по сечению волновода электронного пучка.

Для простейших геометрий форм-фактор (5) определяется в явном виде. Например, для плоского тонкого пучка между двумя проводящими плоскостями (в данном случае речь идет не о полном токе, а о токе через единицу площади поперечного сечения).

$$G = x^2/\pi^2(x - x_0)x_0, \quad 0 < x_0 < x, \quad (7)$$

где  $x$  — расстояние между плоскостями, а  $x_0$  — координата пучка. Для тонкого трубчатого пучка в цилиндрическом волноводе

$$G = 2/\mu_{01} \ln R/r_0. \quad (8)$$

Здесь  $\mu_{01} \approx 2,43$ ,  $R$  — радиус волновода, а  $r_0$  — радиус пучка.

Рассмотрим важную для приложений геометрию — трубчатый, но уже не тонкий, а конечной толщины пучок в цилиндрическом волноводе. Дисперсионное уравнение для этого случая и в пределе  $\omega/k_z \rightarrow 0$ ,  $k_z \rightarrow 0$ , имеет вид

$$q \frac{J_1(q\xi_1)N_1(q) - J_1(q)N_1(q\xi_1)}{J_0(q)N_1(q\xi_1) - J_1(q\xi_1)N_0(q)} + \frac{1}{\ln \xi_2} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\xi_1 = r_1/r_2$ ,  $\xi_2 = R/r_2$ ,  $q^2 = \omega_{b1}^2 - 3r_2^2/u^2$ ,  $0 < r_1 < r_2 < R$ ,  $R$  — радиус волновода, а  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы пучка.

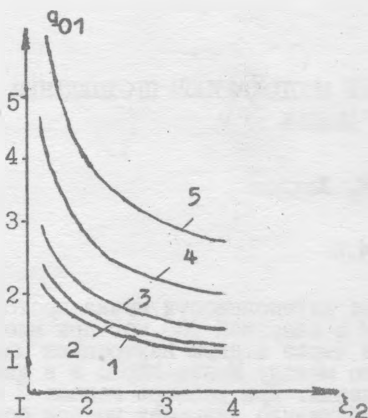
Минимальный корень  $q_1(\xi_1, \xi_2)$  уравнения (9) дает необходимое условие Пирса, которое можно записать следующим образом

$$\frac{\omega_{b1}^2 - 3}{k_{\perp 1}^2 u^2} \left( \frac{\mu_{01}}{q_1 \xi_2} \right)^2 = 1, \quad k_{\perp 1} = \frac{\mu_{01}}{R}. \quad (10)$$

График функции  $q_1(\xi_1, \xi_2)$  представлен на рис. I. Условие (10) можно записать как условие на ток

$$J_p = J_{Op}(1 - \xi_1) \left( \frac{q_1(\xi_1, \xi_2)}{\mu_{01}} \right)^2. \quad (II)$$

Видно, и это вполне естественно, что чем меньше  $\xi_2$ , то есть чем ближе пучок к стенке волновода, тем больше предельный ток. Максимальный ток при любом  $\xi_1$ , реализуется при  $\xi_2 = 1$ . Если  $\xi_1$  близко к единице, то  $q_1^2 \approx [(1 - \xi_1) \ln \xi_2]^{-1}$  и (II) переходит в (6) и (8).



Р и с. I. Минимальный корень уравнения (9) для  $\xi_1 = 0,2$  (1);  
0,4 (2); 0,6 (3); 0,8 (4); 0,9 (5)

Характер поведения предельного тока Пирса при изменении радиусов пучка очевиден заранее. Нашей задачей же было установление здесь количественных закономерностей. Приведем два характерных примера. Для пучка расположенного около оси волновода,  $\xi_2 = 4$  и  $\xi_1 = 0,2$ , предельный ток в пять раз меньше чем  $J_{Op}$ . А в случае пучка, прижатого к стенкам,  $\xi_2 = 1,2$ ,  $\xi_1 = 0,8$ , он больше  $J_{Op}$ , но только всего в 1,4 раза.

В заключение авторы выражают признательность А. А. Рухадзе, в дискуссии с которым родилась идея настоящей работы.

Поступила в редакцию  
4 февраля 1983 г.