Краткие сообщения по физике № 4 1982

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ $g \sim 1$

А. С. Бруев

УДК 530.145.7;539.171.016

Построена модифицированная теория возмущений (ТВ), последовательно учитывающая полюса мероморфной функции. В качестве примера рассмотрены полюса матрицы рассеяния в комплексной плоскости значений константы связи.

В тех случаях, когда приходится иметь дело с мероморфными функциями, вместо традиционной ТВ можно построить модифицированную ТВ, последовательно рассматривая полюса мероморфной функции. Учет полюсов удобно проводить с помощью полюсного разложения, которое в случае простых полюсов имеет следующий вид /1/

$$\xi(g) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{g^{\lambda}\xi_{\lambda}^{(1)}}{[1 + g\alpha_1]\cdots[1 + g\alpha_{\lambda}]}; \tag{I}$$

$$\alpha_{\lambda} = \lim_{s\to\infty} \alpha_{\lambda}^{(s)}, \quad \alpha_{\lambda}^{(s)} = -\frac{\xi_{\lambda}^{(s+1)}}{\xi_{\lambda}^{(s)}}, \quad \xi_{\lambda+1}^{(s)} = \xi_{\lambda}^{(s+1)} + \alpha_{\lambda}\xi_{\lambda}^{(s)},$$

где $\xi_1^{(s)}$ – s-тый член степенного разложения функции $\xi(g)$. Разложение (I) объединяет в себе свойства известного приближения Паде /2/ и разложения Миттаг-Лефлера /3/, отличаясь от них более удобным способом учета полюсов.

В данной заметке мы применим разложение (I) к задаче потенциального рассеяния, в которой возникает необходимость учета полюсов матрицы рассеяния $\xi(g)$ в комплексной плоскости значений константы связи g, соответствующих связанным состояниям. В качестве примера возьмем потенциал сферической ямы.

При больших энергиях частицы, когда $PR \gg 1$ (R – радиус ямы, P – импульс частицы), нетрудно показать, что $\alpha_\lambda(P) \sim 1/PR$ и, следовательно, в разложении (I) останется только первый борновский член $g\xi_1^{(1)}$. Пусть теперь $PR = 0$. Тогда разложение (I) перейдет в разложение для длины рассеяния

$$\frac{a(g)}{R} = g\,\frac{\Phi(1)}{1+g\alpha_0} + g^2\,\frac{\Phi(2)+\alpha_0\Phi(1)}{(1+g\alpha_0)(1+g\beta_0)} + \dots, \qquad (2)$$

где $g = 2mU_0/R^2$, m – масса частицы, U_0 – глубина ямы.

Используя степенное по g разложение длины рассеяния

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{3}g - \frac{2}{15}g^2 + \frac{17}{315}g^3 - \frac{62}{2835}g^4 + \frac{1382}{155925}g^5 - \frac{21844}{6081075}g^6 + \dots, \qquad (3)$$

найдем последовательные приближения $\alpha_0^{(n)}$ величины α_0. Результаты приведены в табл. I.

Таблица I

n	I	2	3	4
$\alpha_0^{(n)}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{62}{153}$	$\frac{691}{1705}$
$\delta^{(n)}$	I,3%	0,I29%	0,0I38%	0,00I5%

Для расчета β_0 удобно использовать формулу

$$\alpha_\lambda = \lim_{n,m\to\infty} \alpha_\lambda^{(n,m)}, \quad \alpha_\lambda^{(n,m)} = \alpha_{\lambda-1}^{(n)}\,\frac{\alpha_{\lambda-1}^{(m)} - \alpha_{\lambda-1}^{(n+1)}}{\alpha_{\lambda-1}^{(m)} - \alpha_{\lambda-1}^{(n)}}, \qquad (4)$$

которую нетрудно получить, используя соотношение

$$\xi_{\lambda+1}^{(s)} = \xi_\lambda^{(s+1)} + \alpha_\lambda \xi_\lambda^{(s)}.$$

Рассчитанные по формуле (4) величины $\beta_0^{(s,t)}$ для некоторых s и t приведены в табл. 2.

Таблица 2.

$t \backslash s$	3	4	5		Точное значение
I	0,0357	0,0392	0,0395	0,0396	0,0450 $(4/9\pi^2)$
2	–	0,0390	0;0429	0,0433	–
3	–	–	0,0400	0,0445	–

В приближении, когда $s = 3$, $t = 1$, с помощью (2) получим

$$\frac{a}{R} \simeq \frac{1}{3} g \left(1 + \frac{62}{153} g\right)^{-1} \left[1 + \frac{4g}{765} \left(1 + \frac{1}{28} g\right)^{-1}\right]. \qquad (5)$$

Если сравнить значения длины рассеяния, вычисленные по формуле (5), с точными значениями /4/, а также со значениями, полученными в приближении одного полюса, то можно сделать вывод о том, что даже очень приближенный учет второго полюса приводит к значительному улучшению приближения в области значений $\infty > g > -\pi^2/4$.

Таким образом, для построения эффективных приближений для амплитуды рассеяния необходимо знать выражения для борновских амплитуд при степенном по g разложении матрицы рассеяния. Для произвольного потенциала получить точные выражения для $f^{(n)}$ достаточно сложно, да и их практическая ценность в виду сложности невелика. Поэтому представляет интерес вычисление этих величин путем последовательных приближений. Ограничимся случаем $|g| \leqslant \pi^2/4$, когда эффективно работают приближения с одним полюсом. Для первых борновских амплитуд имеем

$$f^{(2)} = g^2 R \left[\frac{2}{15} + \frac{1}{9} iPR + \frac{26 - 2x}{315} (iPR)^2 + \frac{2}{45} (iPR)^3 + \ldots\right],$$

$$f^{(3)} = -g^3 R\left[\frac{17}{315} + \frac{4}{45}\, iPR + \frac{1310 - 9x}{14175}(iPR)^2 + \frac{344}{4725}(iPR)^3 + \ldots\right], \qquad (6)$$

где $x = \cos\Theta$, Θ – угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{P}'$.

Чтобы получить выражение для борновской амплитуды $f^{(n)}$ в промежуточной области энергий, когда $PR \sim 1$, запишем $f^{(n)}$ в виде разложения по функциям с дробно-линейной зависимостью от $Z = iPR$. Используя теорему Бюрмана /3/, получаем

$$Z^{n-1} f^{(n)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!}\left[\frac{\Theta_n Z}{1 + \Theta_n Z}\right]^s \left\{\frac{\partial^{s-1}}{\partial Z^{s-1}}\left[\frac{\partial f^{(n)}}{\partial Z}\left(\frac{1+\Theta_n}{\Theta_n}\right)^s\right]\right\}. \qquad (7)$$

Оставив два первых члена в разложении (7), при $x = 1$ находим

$$f_{II}^{(2)}(Z) = g^2 R\left[\frac{0{,}1333}{1 - 0{,}4826Z} + \frac{0{,}0468Z}{(1 - 0{,}4826Z)^2}\right], \qquad (8)$$

$$f_{II}^{(3)}(Z) = -g^3 R\left[\frac{0{,}0540}{(1 - 0{,}4899Z)^2} + \frac{0{,}0360Z}{(1 - 0{,}4899Z)^3}\right], \quad |Z| \leq 2,$$

где величины $\Theta_n^{(i)}$ найдены из сравнения членов порядка Z^3 в (8) и разложении функций $Zf^{(2,3)}(Z)$. Точность приближений в (8) можно оценить, рассчитав зависимость энергии уровня $1s$ от константы связи, воспользовавшись соотношением

$$1 + \alpha_1(\varkappa) = 0; \quad \varkappa = -iPR, \qquad (9)$$

где $\varkappa$ связано с энергией связи обычным соотношением $\varkappa = \sqrt{2\varepsilon}$ (ε выражено в безразмерных единицах).

Уравнение, связывающее g с $\varkappa$, можно найти с помощью соотношений (9) и (8). Для первого и второго приближения получаем

$$g(0,4+0,0527\varkappa^{(1)}) = -(1+0,4826\varkappa^{(1)})^2;$$

$$g(1+0,4826\varkappa^{(2)})(0,0540-0,0095\varkappa^{(2)}) = \qquad (10)$$

$$= -(1+0,4899\varkappa^{(2)})(0,1333+0,0185\varkappa^{(2)}).$$

Отметим, что погрешность значения $\varkappa^{(1)}(1)\sim 5\%$, погрешность следующего приближения $\varkappa^{(2)}(1)\sim 0,14\%$.

Автор признателен В. К. Конюхову за внимание к работе.

Поступила в редакцию
7 декабря 1981 г.

Литература

1. А. С. Бруев, Препринты ФИАН № 46, 121, М., 1981 г.
2. G. A. Baker, Jr., Advan. in Theor. Phys., 1, 1 (1968).
3. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ГИФМЛ, 1963 г., т. I.
4. В. В. Бабиков, Метод фазовых функций в квантовой механике, "Наука", М., 1976 г.